K. E. グスタフソン

応用偏微分方程式

——近代的方法への入門——

(上)

阿部剛久
音田　功 訳
古城朝美

海外出版貿易株式会社

わが子，Amy と Garth へ

訳者まえがき

本書はK.E.Gustafson著，*Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods,* John Wiley & Sons, New York, 1987，pp. xx＋409の第2版（初版（1980）の改訂増版）の翻訳である．原著の初版に出会ったのは1983年の頃であった．内容，構成，叙述形式その他どれをとっても奇異な思いであった．それまではこれほど個性的で特徴的な偏微分方程式に関する書は他に見当らなかったからいささか驚きもした．偏微分方程式や数理物理学に関心を抱く人達であれば誰れしも，例えば，古くてJ.Hadamard (1932)，H.Bateman (1932) から近年ではI. G.Petrowski（1945，1958（邦訳）)，R.Courant-D. Hilbert（1953，1962（新版）)，最近に至ってはF.John（1971，1982（第4版）)，R.Leis（1986）等の一つや二つは学び親しまれたことであろうし，これらの他にも内外に優れた書物が数多く存在していることも御存知であろう．これらの，いわばオーソドックスな書物から受ける感覚とはまるで異ったユニークな印象を受けるのが本原著である．

科学技術の世界では偏微分方程式を問題とする議論の重要性は今更言うまでもない．本書は，早ければ理工系専門課程，やゝ遅れて大学院初級から一般の科学技術者，専門家および教育者を対象としている．第1版の緒言に記されている様に著者Gustafson教授は，偏微分方程式の主題とその方法的基礎および関連した応用面への入門を図ることであり，米国内で懸案のこの目的達成のためのカリキュラム要求を満たすこと，という目的と動機をもって原著を著した．主題の豊富さと内容の多方面にわたる偏微分方程式の成書として他に類を見出し難いであろうと思われる．

原著の内容や特徴について既に，例えばMathematical Reviews（1981，81k：35003および1988，88b：35001)，SIAM Reviews(1983，Vol.25)およびZentralblatt für Mathematik (1981，Vol.　434) 等が批評紹介している．これらの書評は第2版刊行後，翻訳のやり直し作業中に初めて気付いたことであった．うかつであったとはいえ，我々が第1版において当初に抱いた印象と同じものであったと知って，原著の存在価値と翻訳出版の意義を改めて確認し得たことは大きな収穫であった（関心ある人々は上記のReviewも参照されるがよい.)．ここでは先の評論誌の書評とは別に，訳者の思う原著の主要な特性を三点にわたって強調しておきたい．

先ず内容は目次を通覧しただけでも分る様に，主題の豊かさと項目は多岐にわたり，偏微分方程式の対象も数学の枠にとどまらず，物理学や化学を中心に自然科学や工学の広用分野の第一線にまでおよんでいる．その方法も古典的なものからフーリェ級数や積分論の基礎概念を介して近代的な手法と高速計算機数学に至る事柄を現時点まで多くの問題を通して説明している．しかも偏微分方程式に関する基本的に重要な事項（解の存在，構成，条件付問題等）の基礎付けと方法の正当性を特に変数分離法に関して強調し過ぎるぐらいに追求すると共に，通常のテキストでは容易に伺い知れないこれらの方法の互いに関連して緊密性を持つことが示される．だが原著の主要なテーマはフーリェ解析とヒルベルト空間論を方法とするこれらの偏

微分方程式への応用であり，そして関連する諸問題の解法および計算機数学の応用である．従って，これはまた同時に応用数学の基礎的入門の役割を果している．各テーマや問題によっては説明に長短があるが，いずれも刺激的で示唆に富み十分興味が持てよう．歴史的な事項の説明も単なるお飾り的なものではなく，問題や方法の成立由来や意義付けを行い，時には興味のある問題を種々提起している．余談ながら加えておくが，本主題の純理論的面ではより包括的なものとして Hörmander の理論や佐藤の超関数論からする理論，非線形の作用素論等方法的にも高度な展開をみせる諸理論が存在して今なお活発に研究されている．しかしながら，原著の目的からすればこれらの理論を用いずとも標準的な理論の枠内で十分役目を果していると言える．

さて，一方で原著の記述スタイルは自由奔放でありながら（これも数学書の通念で眺めるからであろう），論理の展開が分析的でかつ批評的見解に満ちたものである．例えば，偏微分方程式の解に関する疑問を始め，物理学的考察や補足的議論等，随所に見られる様に哲学的とも言える徹底した内省的な批判精神が全体的に書物の基調をなしている．通常の数学書に認め難い文化的な視野を形作ると共に数学書の新しい〝知的な〟モデルを提供するであろう．

もともと原著は Colorado 大学や Minnesota 大学等での講義を基に著されたものであるから教育目的をもって書かれたことは緒言を始め利用指針等に詳しく記された通りである．多くの文献にあり勝ちな通り一遍の(？)ものでない，著者のテーマに対する真摯なまでの戦略的なカリキュラムが意識的に配慮された結果，全体を〝古い学習規範〟に沿う形で内容構成が行われたとみるが自然ではなかろうか．演習問題の配置の仕方，休止の設定そして歴史に関するコメント等多くの工夫がなされ，従来の専門書にない新しくて活性化に富んだ書物というべきであろう．この書の方針がそのまま日本での大学学部および大学院での教育に適応するかについては異論があるかも知れないが，その考え方は大きな示唆を与えてくれよう．また，一般の専門書を見慣れた目からすれば，本書が個性的で一見奇異な感を抱かせるのは主題に向けて著者の深い教育的配慮からする良心的な姿勢に基づくものであることが肯ける．

この様にして，原著は数学とその周辺の内容の豊富さ，哲学的知見に基づく歩みの堅固さ，そして強烈なまでの教育的信条の遂行が総合的に有機化された〝三位一体〟の書物を実現し得たといえよう．翻訳の途上，時折かいま見た反発的気持もいつしか止んで，この大いなる労作に頭の下る思いでいる．

最後に原著の翻訳の過程をふり返らせて頂くと，内容の豊富さに加えて記述の複雑さと構成形式の奇抜さに興味を抱いて翻訳を思い立ったが，いざ作業を始めると数学書にしては文章の冗長さと特有の粘っこさ故に翻訳の苦痛を味わうこと度々であった．どうやら作業を終えて，初版の翻訳原稿の修・訂正を行っているうちに第2版が出版されたので再び作業はふり出しに戻り稿を改めることとなった．校正作業を含めてこの間の労苦は並大抵ではなかった思いがする．通常の数学書に見られない自由なスタイルで記された原著の翻訳はこの様に困難さと苦痛を伴いはしたが，

優れた内容と哲学的洞察そして深い教育的配慮が翻訳への大いなる励ましとなったことを述べておきたい.

顧みると原著の初版に出会って以来，上巻の出版に至るまで八年間を要したことになる（下巻は現在出版準備中である.）. この間，本書の出版に温かい御理解と御尽力を頂いた海外出版貿易株式会社の黒田肇社長，原著の出版社 Wiley と翻訳権の交渉・手続きに当たられた森俊雄調査（後営業）部長および数々の御苦労を惜しまれなかった大野富積営業第一課長に深く感謝する次第である. 同社のおかげで貴重な原著の翻訳が成ったことを心から喜ぶと共に三氏へ厚くお礼申し上げる. また，印刷において当方の多大な要求に十分応えて下さった株式会社トッパンの鎌形真澄営業課長および同課佐藤進氏を始めとする印刷に直接携った方々へ合せて心から謝辞を申上げたい. 幾多にもおよぶ校正に対して，困難な作業を遂行された御苦労は察するに余りある. さらに，原著者 Gustafson 教授には当方の数々の質問や「日本語版へのことば」の依頼等へ親切にお応え頂いたことを感謝している. 非常に活動的で多忙であるにもかゝわらず，教授は我々の提起した種々の問題の究明に意欲的であって度々便りをよこされる. 我々も今後のよき進展を願っていることだけを述べてこの異例とも思える長いまえがきを終えることにする.

1991年2月　訳者

付　記

原著の翻訳は出版上の都合によって，(上)，(下)の2巻に分けたことをお断りしておく（各巻の内容については目次参照）. ここで次のことを述べておきたい.

1．注釈中の文献および人名については，原著における指示が十分でなかったり，明確でないものが多数見受けられるので可能な限りこれらを調査し，明示の徹底に努めた. 特に文献類に関しては，これを補充する意味で関係深い文献や単行書の場合はその邦訳を訳者の知り得る範囲で記載した.

2．通常の専門用語または学術用語は学会の定めるところ，または慣例に従って呼称しているが，原著中にあって普通一般には見慣れないと思われる用語に対しては，その場での使用意義に即して適当な呼称付けに努めたが，その呼称の後に括弧を設けて原語を記した. 訳者はこれらの呼称にこだわるものではない.

Karl E. Gustafson教授のこと

原著の著者Gustafson教授は1935年に米国Iowa州Manchesterに生まれ，Colorado大学で物理工学，応用数学を学ぶと共に，研究職を経て1965年にMaryland大学から「ア-プリオリ評価と積分微分方程式の境界値問題への応用」に関する研究でPh. D.の学位を得た(指導教授はL. E. Payne氏である)．1937年から現在まで母校Colorado大学の教授として研究と教育に精力的に指導的役割りを演ずる傍ら，米国内における数学，応用数学，物理学，工学に関する主要な政府関係の各種委員会活動を通じて国際的に大きく寄与されている．近年，計算機数学および物理学分野での最も指導的地位にあって，その研究開発と大学院教育に積極的に取組んでいられる．この間，Paris, Lausanneを始め世界各国の大学およびGenevaの高等学術研究所，他種々の物理学，工学の研究所の客員教授として招かれ，研究と指導に当られた．教授の活動を中心に以下少し詳しく述べてみよう．

大学時代から海軍の研究所やMaryland大学の流体力学および応用数学研究所に滞在して研究活動に当初から従事し，学位取得後はGenevaのBattelle研究所でのNATO／NSFの一員として二年間過ごした貴重な経験が今日の教授の広範囲にわたる研究と教育の両面の活動に大きく影響を与えている．

教授の研究は数学の純粋と応用の両面の広域におよび，初期の関数解析と偏微分方程式に関する研究を皮切りに理論と他分野への応用を中心に大きく広がりをみせ，ここ十年来，数値流体力学・工学，分岐理論，多次元信号解析の研究におよんで，これらを契機に巨大規模の科学計算から並行して電算機建築学に到った．今日までの公式発表の論文だけでも150編を超える．また，研究上の国際的活動も精力的に行い，上記の種々の分野に関する多くの学会，国際会議，シンポジウムでの招待講演，発表等200回に近い．中でも，1983年の数理物理学に関する第VII回国際会議の議長として母校で開催されたことは教授の業績が称えられてのことであった．最近では(1990年)，計算機物理学に関する第1回MACSの技術委員会委員長として会議を運営された．

この他にも，研究と教育の両面に関する著作活動も行われ，本原著初版出版以来，数理物理学，偏微分方程式，量子力学，計算機物理学および国際会議論文集等10冊を超える．特に本原著は米国内に広く受入れられ今では著名なテキストになっている．それも教授の広くて深い学識と若い時からの豊かな経験に裏付けられた故であろう．

上述の諸活動の他に，米国内の四種の著名な科学雑誌の評者として，またMathematical Reviewsの検閲解説者として1969年から合せて100回に近い論評をこなされ，同時に数学，物理学，工学の専門家であれば誰れでも知っている学術専門誌およそ30種のレフェリーも兼任されこれまで60回余の審査に当られた．驚くほど多数の大学，研究所，学会，産業界等から寄せられる信頼と教授の力量が察せられるが，こうした多方面にわたる業績と多彩な活動により各種の受賞や表彰等の名誉を得られてい

る.

教授は研究指導と教育にも極めて熱心でいられることはこの方面の運営と実践活動を学内だけでなく，米国内における各種委員会の長期にわたる歴任でも明らかであるが，大学院の研究指導でも多くの博士修得者を出され，学生の信望も厚く，親切できめ細い指導に当られている．一方で，教授の研究室には諸外国からの訪問研究者が後を絶たないでいることは実に優れた人であることを思わせる．

教授のなされた仕事の内容までここで紹介することはほとんど不可能であるから省略するが，最近の事柄に関しては本書の（下）でその一端を伺い知ることができる，とだけ申し添えておきたい．

日本語版へのことば

この日本語版において原著の第2版にみられる多くの誤植が訂正されたことを読者へお知らせしたい．また，日本語版では原著を二巻に分けて出版することにしたが，その分割は節2.5と休止第3回までを上巻とし，次節以下を下巻とする．上巻はFourier固有関数展開を主題とする基礎を含み，下巻は計算的手法に重点を置く進展的な内容のものである．

本書の第3章において，原著の第2版にはない休止第5回と第6回を訳者と相談のうえ加えたことによって書物の釣り合いが完璧となった．この新しい題材は付録AとBのそれぞれを補充するものであって，双曲型保存則（Riemann問題）および衝撃捕捉法（例えば，Godunovスキーム）の簡潔な扱いを含んでいる．これらの話題は最近の高度な研究課題である．

最後に，私は原著に対して骨の折れる翻訳の仕事を遂行され，かつ誤植の修正や訂正に尽力された日本の同僚である阿部剛久，音田功の両教援および古城朝美氏に心から謝意を表する．

Karl Gustafson

第1版への緒言

相当長い間，大学学部レベルで偏微分方程式とHilbert空間法の満足な入門書が求められてきた*). カリキュラムの目的からすれば，その扱い方を程よくこなすことができれば半年課程であってよいし，また多少範囲を広げて通年課程であってよい筈である．その中心的な主題は自然に互いに結びついて発展した次の三項目から成るであろう．

偏微分方程式,
Fourier級数とHilbert空間,
応用数学の入門.

本書は最近10年間Minnesota大学，LausanneのFédérale工科大学およびColorado大学で著者が行った偏微分方程式のコースから得たもので，その第一の目的は上記の要求を満たすことである．

第二の目的は数学の大学院生や関心をもつ科学研究者にこの主題の初歩を提示することである．偏微分方程式は応用数学や純粋数学の各所にばかりでなく，物理学や工学，その他の諸科学においても基礎的な役割を演じており，かつ歴史的にみても多くの数学解析の発展をうながした．

第三の目的は，例えば複素解析あるいは関数解析などの関連した問題に数学的に埋没してしまうきらいを避けることである．しかしそうはいっても，偏微分方程式に関連する関数解析やスペクトル理論のうちの幾つかの初等的概念は意識的に導入されている．それは主としてHilbert空間とFourier級数に関係してなされた．著者の経験として，学生は例えば物理学やそのほかの応用で，偏微分作用素と対応するスペクトル理論との相互関係が自然に現われるので，それに大変興味を示す．そのうえ，学部レベルにおいて関数解析の幾つかの重要な初歩を簡潔にまとめて示すことは，数学をはじめ工学，物理学あるいは関連諸科学での仕事を修得しようとする学生達にとって，恐らく的を得ているであろう．

*)例えば，下記の記録に述べられている：

CUPM（大学学部における数学教育案委員会）資料

A General Curriculum in Mathematics for College, A Report to the Mathematical Association of America (1965).

A Compendium of CUPM Recommendations : *Studies, Discussions, and Recommendations by the Committee* (1965).

COSRIMS（数理科学研究援助委員会）資料

The Mathematical Sciences : *A Report* (NAS−NRC) (1968).

AMTRAC（応用数学教育委員会）資料

The Role of Applications in the Undergraduate Mathematics Curriculum (NAS−1979).

Notices of the American Mathematical Society (November, 1977).

NAS−NRC Committee on Applied Mathematical Training.

S. Smale, *The Major in Mathematics.*

本書は特に最近３年間にColorado大学の最上級生向けの通年課程のために，著者の行った講義ノートをもとにしてかかれた．このコースは前期約40名，後期20〜30名の学生が登録した．殆んどが数学，物理学および工科の学生達で，学部学生と大学院生の間には大雑把に言って隔たりがあった．新入生１人，２年生数人そして一方で数学や関連分野での博士課程院生達がこのコースを履修した．この広い学生層をうまく折り合わせることには何ら困難はなかった（しかし試験の得点に関しては学部学生と大学院生とを分離して扱う方が望ましかった）．

常微分方程式の初等的な体系を扱える程度の微積分学はあらかじめ必要である．高等解析学や物理学は助けにはなるが，前もって要求しない．必要な関連事項はそこここで説明される．このコースが新進の若い数学者や実世界に関係する数学に早くから取り組もうと願う他の分野の科学者達，そしてこれら教育の隙間を埋めたいと望む大学院生にとっては，実に魅惑的である．よって程度の高い形式的な予備知識は当然避けられなければならない．このコースは応用数学や工学の専攻学生達にとって高等解析学の通年科目として受け入れられる内容を提供しているし，数学科学生に対しては，高等解析学と同時にでも，その直後にでも履修されるものである．

第１章は半年課程に十分な題材を含み，応用数学に関連した偏微分方程式とFourier級数の課題への入門を十分に果している．第２章は偏微分方程式の原理的な解法，すなわち，変数分離法を一層包括的に見ることから始めて，Hilbert空間に関連した解法と数値解法をより十分に展開する．多くの大学院生と少数ではあったが多少の予備知識をもった学部学生達は次の半期課程へ苦もなく入って行った．

本書の目次を見ればわかる様に，二つの章はいずれも節１－８と節９とに整理される．節１から節８まではその順に従って進められるべきで，ただ節７と節８の範囲は少々任意かつ自由裁量で教授されてよい．これらの八つの節は各節で議論された概念と技術について，学生の理解を確実にし，かつ深めるために独自に組立てられた問題を含んでいる．節９は前節までの話題を確認するためにあって，九つの“吟味問題”にわかれる．問題9.1から問題9.8までのそれぞれは同一番号のついた以前の節をさらに深化させ，学生向けの演習の補充問題を含んでいる．問題9.9で幾つかの“確認”のための問題を与えて，その章を終える．

教授者は与えられた節を終えた直後，節９の補足的な関連題材を扱うかどうかは，各人の選択の自由である．この選択は好みや教室での反応に影響される．経験に基づいた選択では，概念の精密化や詳細事項は後々の議論のために残しておき，主題の基本事項へいちはやく移り進むことであった．しかし，既に示唆した様に，本書は意識的に十分過ぎる位に柔軟性に富んだ方式でかかれているから，教育にまた学習に別のやり方を用いることもできる．

節1.8（分岐理論入門）および節2.8（散乱理論入門）は，応用数学の二つの重要な分野へと学生を導くことだろう．それらは共にかなり科学的興味を持続している分野である．分岐理論は特に力学その他で実際に現われる非線型微分方程式を研究する一分野である．散乱理論は相互作用する系の動力学の理解に関係しており，これまでもそうであったが，これからも科学の礎石の一つであり続けるだろう．

最後に，本書はまた楽しい夕べの拾い読みから，主題の本質を会得したいと望む科学愛好者にとっても興味深いものであると期待している．

Karl Gustafson

第2版への緒言

初版の目次に第3章を加えたことにより，かなり増大したことに気づくだろう．この部分は次の内容を含んでいる．（A）1階偏微分方程式系の拡張された取扱い．自己相似解の理論の初歩と局所変換群のより現代的な利用；（B）計算機法への簡潔な入門．差分法，有限要素法，有限スペクトル法のスキームの個々の基本事項；および（C）流体動力学の偏微分方程式に関する最近の研究の一端．流体の渦運動や乱流の理論的なものばかりでなく計算による極く最近の成果を含む紹介．

初版の批評で，個人的にも公的にも*)，学生達のための例題，説明，演習を加えるよう求められた．それに応じて，素直に活用できる演習問題が第1章の各節のあとに挿入された．説明の都合上，筆者は第1章と第2章のそれぞれ二個所に“休止”を挿入させることにして，かなりの数の例題，説明，演習を補充した．この休止を入れた所は実際に，学生達が彼らの思考をまとめ上げ，訓練するためにそれを活用できる箇所である．第1章と第2章の終りの問題1.9.9.9と問題2.9.9.9はまた演習の補充問題の第三の集まりをなすように変えられた．他の変更については，より進んだ例題や演習問題が，拡張された節――分類，特性解，最大値の原理，および数値解法――におかれ，本書の終りにおいた解答の節は確かに拡大された．

ここに筆者はこの機会に，偏微分方程式のコースを受けたすべての学生達に私への支援を感謝したい．彼等はその熱意，意見，忍耐をもって筆者を支えてくれた．この第2版は，初心者には直ちにより容易なものとなり，また専門家にはより興味あるものになることを期待する．最後に，本書は扱い易い大きさのものにしておくように試みられた．

Karl　Gustafson

*）主として，
Zentralblatt für Mathematik **434**：35001（1981），　P. Seydoux.
Mathematical Reviews **81k**：35003（1981），　R. MacCamy.
SIAM Reviews **25**：110（1983），　J. Synawiec.

利用指針

高学年の学生達あるいは興味をもつ仲間達に対して，本書は見かけ上立派に役立っている．初心者に対し，次の三つは受け入れ易い誘導路である．

1.学部学生（例えば四年次）のみの半年課程

節1.1～1.5：これは本書の主題を定義し，すべての本質的概念を用意する．

問題1.9.1－1.9.3：これらは分類と最大値の原理に関してより詳しいものを用意する．

節1.6の一部，付録A.1および休止第1回と同第2回：
発散定理に関するより進んだ題材，1階方程式系，そして変数分離，Green関数と変分法に関する補足問題．

2.学部－大学院（例えば初年次）の混成組の通年課程

上記に節2.1－2.2と問題1.9.6を加える：後者は変数分離法に対して加えられるべき厳密性を用意する．

節2.3－2.5の部分と休止第3回：Fourier級数，固有関数展開，Green関数および波動方程式に対するd'Alembertの解に関するより多くの情報．

節2.6，休止第4回および付録B.1－B.3：時間の許す限り，数値解法への入門．

3.大学院（例えば二年次）課程

第一学期，第1章の全部：これはすべての基本事項に加えて，物理学的かつ理論的考察の議論を用意する．

第二学期，第2章の全部：特殊関数の復習と変数分離法の収束性の証明のあとで，Hilbert空間の考え，Sturm－Liouville方程式の特殊な場合，変分原理そして数値解法に対する理論的考察を確立する．また役に立つ数多くの高度な話題（例えば，散乱理論，非線形波動方程式）をもつ．

第三学期，第3章のすべて：非線形偏微分方程式に対する群論的方法，計算機的方法，物理学的方法への入門．

第2版は600を超える問題と演習問題を含み，そのうちの三分の二以上に対して解答が与えられるかヒントが与えられている．特に本書の初めの部分において，演習問題が本題への貴重な息吹きあるいは日常的な慣行を促がすために，入れられている．他方，問題は容易なものから外延的なものへと変っている．教授者の判断による，或る種の話題の取扱いをより深めるために，古典的な文献や最近発表の重要な研究が到るところで紹介されている．

読者への注意

本書は，・・・一度・・・二度・・・それから再び・・・の教育的流儀に従っている．それはこのコースがどのように展開したかを示すからである．

むしろ，古い学習規則——留意，連想そして反復——によって顧みるとき，上のやり方は正しいとしてよいだろう．初読のときは十分に注意を払わねばならない．二度目は結びつきやより一般的な情況をよりよく連想しなければならず，三度目には大切な特徴や細部が強調され，かつ繰り返されるべきである．

そして，あらゆる学習の場合と同様に，自信をもつことが大切である．当初に一つ，二つの細かな事につまずいたからとて，落ち込むことはない．

上 巻　目 次

―下巻　主要目次(予定)―

第1章

通常の三つ組の概念

…基本事項，そしてそこに問題がある…

偏微分方程式（しばしばPDEと略記される）

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_k^s \cdots \partial x_j^r}, x_1, \cdots, x_n, t, \text{他のパラメータ}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

はかなり一般的な実在であって，抽象化すると多少意味が曖昧になる．ここで$u = u(x_1, \cdots, x_n, t, \text{他のパラメータ})$は未知関数もしくは未知関係式であり，$F$はかっこ内の変数で規定された関数である．通常重要な応用に現われる特殊な方程式に，あるいはその性質が特定の叙述に従うよう一般化された部類の方程式に興味が絞られる．殆んどの系のダイナミクスは，それらが物理学的，生物学的，経済学的あるいは他の何であれ，通常高々二つの導関数（例えば，速度と加速度）を含むので，2階（すなわち，式（1.1）で$m=2$）の方程式が最も重要であり，かつ最も頻繁に現われる*)．

微積分学によると，常微分や偏微分をとる演算は線形演算である．すなわち，

$$\partial(u + v)/\partial x = \partial u/\partial x + \partial v/\partial x.$$

この様に，偏微分方程式は$f(x)$を既知デ－タとする線形作用素方程式

$$Lu = f \qquad (1.2)$$

として現われる．ただし，Lは導関数の和と結合のみを含むもので，$(\partial u/\partial x)^2$のような2次（あるいはそれ以上の次数）の項を含まないとする．線形作用素はその定義域

*）1階偏微分方程式はしばしば1階常微分方程式系に帰着され，ここでは扱わない．付録A.1および問題1.9.4を見よ．階数が2より大きい方程式は2階の方程式に対して進められた方法によって大部分取扱える．例えば，休止第2回を見よ．

$D(L)$に属する任意のベクトルまたは関数u, vおよび任意の数またはスカラ-a, bに対して

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v) \tag{1.3}$$

を満たす変換Lであった．物理学の問題を設定するとき，線形化仮定は適用に応じてその有効性を変えるが，線形化は通常良好な第一近似であって，有力かつ一般的な線形的手法（例えば，Fourier級数）の適用を可能にする．

この様に，例えば輪状針金に張られた膜面を記述する**極小曲面**[*)]**の作用素**

$$Lu = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

は，三つの項がいずれも非線形であるが，傾斜の小さいときには**線形Laplace作用素**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

によって，かなり良く近似される．さらに，適当な変数変換によって[†)]，この非線形極小曲面作用素は（変数係数の）線形作用素

$$Aw = (1 + \xi^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + (1 + \eta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

へ変換され，またさらに変換されて，次元が1高いLaplace作用素

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

になる．

これらの理由によって，本章ばかりでなく本書全般にわたって，数ある方程式の中でも主として2階線形偏微分方程式を扱うことにしよう．例えば，節1.8や問題2.9.8でそれぞれ分岐理論や非線形波動を考えるとき，線形性から離れることになるけれども，それらでさえ第一近似は線形であって，線形的方法が可能な限り用いられることが見られるだろう．

この序論を終えるに当って，読者に次の三つの質問に答えるよう望みたい．

質問1．　与えられた二点に直線をどのように当てはめるか（図1a）?

質問2．　時刻$t=0$において物体の温度u_0と冷却法則が与えられたとき，時刻tにおける温度はどのように見出されるか（図1b）?　ここで，冷却の法則とは物体の冷える速度が物体とその周辺の温度の差に直接比例するということを述べたものである．

*)　石けん膜の数学的理論に関する魅力的な最近の議論に関して次を参照せよ．F.J.Almgren, Jr.and E.J.Taylor, The geometry of soap film and bubbles, *Scientific American*, **235**, July (1976), 82—94.

†)　詳細に述べると冗長になるので省略する．問題1.9.9の演習問題に見出される．

質問3． 滑らかに振動している関数を考えるとき，思いつく最初のものは何か（図1c）？

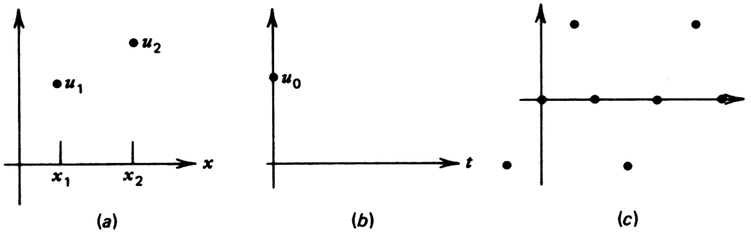


図１．基本的な問題

文句なく読者は，自分自身の目でこれらの質問への解答を既に見出していることであろう．ここでそれらを具体的に表してみよう(図2)．質問1に対する答えは，直線$u(x)=ax+b$に二点を当てはめることによって，次を得る．

$$u(x) = \left(\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}\right)x + \left(\frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1}\right), \qquad x_1 \leq x \leq x_2.$$

質問2に対する答えは，簡単のため周辺温度を0として測ることにすると，方程式$u'(t)=-ku(t)$，$t>0$，$u(0)=u_0$を解くことによって得られる．ここで$k>0$は与えられた比例定数である．すなわち，質問2の答は

$$u(t) = u_0e^{-kt}, \qquad t \geqq 0.$$

質問3に対して，読者は次の正弦関数を予想したことと思う．

$$u(x) = \sin kx.$$

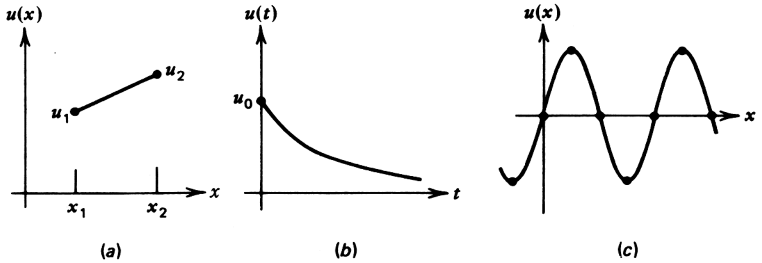


図２．基本的な解

質問1は**境界値問題**の一例である．すなわち，中間領域上の関数に対してある与えられた（例えば，物理学的に得られた）規定に従って，二つの境界点間の関数を張

れという問題である．この例で用いられた規定は二点を結ぶ曲線が最小長さをもつことで，それは幾何学的に直線でなければならない．数学的にこの規定は次式で述べられる：

$$u''(x) = 0, \qquad x_1 < x < x_2.$$

質問2は**初期値問題**の例である．すなわち，予め関数を与えて，その関数がどう発展すべきかに対する（例えば，物理学的に得られた）規定に従って，その時刻以後の関数の振舞いを決定せよという問題である．$u' = -ku$によって指数関数的に減少あるいは$u' = ku$によって指数関数的に成長する二つの場合は，ともに次式で規定される：

$$u''(x) = k^2u(x), \qquad x \geqq 0.$$

質問3は**固有値問題**，時には**特性値問題**と呼ばれるものの一例である．ドイツ語の*eigen*はフランス語の*characteristic*と同義語で，もっと端的にいうと，英語の*inherent*を意味する．正弦関数$u(x) = \sin kx$について*inherent*な性質とは何だろうか？　その仲間の余弦関数とともに，その振動的な性質は次の規定の結果である：

$$u''(x) = -k^2u(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

上記の三つの型の問題

境界値問題
初期値問題
固有値問題

は偏微分方程式において出会うもののうちで最も重要なものである．

1.0　演習問題

1．（初等微積分法によって）次を積分せよ．

(a)　$u''(x) = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$

(b)　$u''(x) = 0, \qquad x > 0,\ u(0) = 1,$

(c)　$u''(x) = -4u(x), \qquad 0 < x < \pi.$

2．次を解け．

(a)　$u''(x) = 0, \qquad 0 < x < 1,\ u(0) = 1,\ u(1) = 0,$

(b)　$u'(x) = -2u(x), \qquad x > 0,\ u(0) = 1,$

(c)　$u''(x) = -4u(x), \qquad 0 < x < \pi,\ u(0) = u(\pi) = 0.$

3．次を解け．

(a)　$\dfrac{\partial u(x,\ y)}{\partial x} = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,$

(b)　$\dfrac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2} = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,$

(c)　$\dfrac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2} = 0, \qquad x > 0,\ u(0,\ y) = 1.$

1.1 通常の三つの作用素と方程式の分類

次の三つの作用素は通常偏微分方程式の研究において基礎をなす*)：

(1) **Laplace作用素** $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$,

(2) **拡散作用素** $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$,

(3) **d'Alembert作用素** $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

これら三つの一般的な種類の偏微分作用素は，それぞれ(1)**楕円型作用素**，(2)**放物型作用素**，(3)**双曲型作用素**である．特定の型の変数変換（後述，また問題1.9.1を参照）によって，楕円型作用素はその標準形，すなわち異なる座標系におけるラプラシアンΔに帰着される．同様に，放物型作用素や双曲型作用素は，それぞれ拡散作用素やd'Alembert作用素に変換される．Laplace作用素†) Δはときには**ポテンシャル作用素**と，拡散作用素はよく**熱作用素**‡)と，またd'Alembert作用素§)は**波動作用素**と呼ばれる．それはそれぞれが後者の呼び名に関連した応用にしばしば現われるからである．いろいろな名称や観点の重要性はあくまでも相対的なもので常にはてしない議論の的になっているけれども，表1.1に要約できる．

*) 記号法に関する注意：記号法個々の正当性を認める一方で，その重要性は最小限におさえられる．その結果，煩わされることなく，幾つもの用法に慣れておきたい． 通常$u(x_1, \cdots, x_n, t)$をスカラ-（例えば実数）値にとる．uがベクトル値をとるときは多少その記号法に注意を要する．簡単にいえば，Laplace作用素に対し，次はすべて同値な記号法である：

$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial^2 u/\partial x_i^2$		微積分形式
$= u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$		偏微分方程式形式
$= u_{,ii}$		Einsteinあるいはテンソルの総和規約
$= \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u)$		ベクトル解析形式
$= \nabla^2 u$		静電気形式
$= u_{xx} + u_{yy}$		2次元形式

他の主要な偏微分作用素に対する記号法にも類似したものがあり，混乱を起してはいけない．$u_t = u_{,t} = \partial u/\partial t$は$t$に関する偏導関数を表し，$t$は時刻を表すことが多い．

†) Laplaceは，1785年刊行の著書“天体力学”でこの作用素を使用した．

‡) 一般の拡散作用素にその名前が習慣的につけられた人は誰もいないようである．多くの異った名前，例えば大勢の人々のなかでThompson,Joule,Brown,Markov,Eddingtonと思いつくけれども，恐らく歴史に忠実であったなら，ポテンシャル作用素はニュートニアンと，また拡散作用素はフーリェアンと呼ばれるべきであろう．Newton, Fourier, d'Alembert（そしてLaplace）の生涯と科学的貢献に関しては，例えば次を参照せよ：E.Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937（訳者注：数学をつくった人々（田中勇，銀林浩訳），東京図書）．

§) d'Alembertが1746年に振動弦の問題の解を示した．

問題1.9.1において，読者は偏微分方程式に対してもっと詳しい分類手続を，また問題1.9.2でそれが方程式のある種の性質とどう関係するかを学ぶであろう*)．ここでは独立変数二個の一般2階偏微分方程式

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

を分類することで十分としよう．それは次の判別規則に従がう（問題1.9.1で判定される）：$d=AC-B^2$とおいて，

判別式	**方程式の型**
$d>0$	楕円型
$d=0$	放物型
$d<0$	双曲型

表1.1

記　　号	呼　　称	別　称（物理学的）	分　類
Δ_n	ラプラシアン	ポテンシャル作用素	楕円型
$\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_{n-1}$	（熱作用素）	拡散作用素	放物型
$\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{n-1}$	ダランベルシャン	波動作用素	双曲型

これら三つの方程式の型の呼称は同名の円錐曲線と関連している．低階の項は判別過程では無視される．線形の1対1の変数変換によって，楕円型方程式は2次元のラプラシアン形

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + (\text{低階の項}) = 0$$

に，放物型方程式はその標準形

$$u_{\xi\xi} + (\text{低階の項}) = 0$$

または

$$u_{\eta\eta} + (\text{低階の項}) = 0$$

に，そして双曲型方程式はその標準形

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + (\text{低階の項}) = 0$$

または

$$u_{\xi\eta} + (\text{低階の項}) = 0$$

に変換される，特にラプラシアン，熱作用素，波動作用素はこのように三つの型の

*)　数学において，学生達はどんな“標準形への変換”も単純化しすぎであり，ごまかしでさえあるかも知れないと直ぐ感じる．正確に，何が“標準的”なのか，何が不変であるのか，等々は明確にされなければならない．他方，標準形それ自身は最もよく現われ，よって本来重要なものであって，それは偏微分方程式の場合も同じことがいえる．

偏微分方程式に対する標準形であることがわかる*).

高階の作用素（例えば，興味ある4階楕円型作用素は弾性論に現われる）の分類も同様に行なわれるが，偏微分方程式系がそうであると同様により複雑である．

作用素が変数係数をもつとき，その分類は局所的にすぎない．すなわち，領域Ωのある部分から他の部分へ移動すると，その型を変えることがある．例えば，気体動力学のTricomi作用素

$$Lu = yu_{xx} + u_{yy}$$

がその場合である．型における違いは全く決定的である（図1.1）：楕円型の領域は亜音速で滑らかな流れに，放物型の境界は遷音速のバリアに，また双曲型の領域は衝撃波の超音速の伝播に対応する．この例における双曲型領域の振舞いから，また

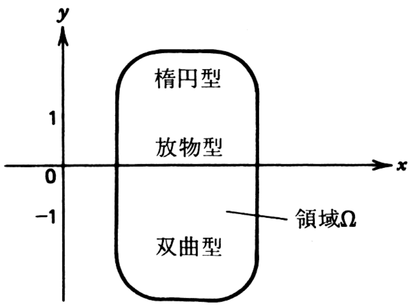


図 1.1

まもなく直面する熱方程式の解に対するPoisson公式から，そして序論で論じた極小曲面の議論から，直観的に次のことが示されよう：

方程式の型	**解の振舞い**
楕円型	定常的でエネルギ-を極小化する曲面
放物型	非常に滑らかで放散的な流れ
双曲型	乱れを維持する波

この帰納的結果は実際に，我々の将来のガイダンスに対してかなり正しい直観的な図式を用意してくれる．

問題1．(*a*)　判別規則を用いて，Tricomi作用素Lに対して，上記の分類を確かめよ．(*b*)　極小曲面作用素Lは実際に楕円型であることを示せ．(*c*)　極小曲面作用素の変数変換によって得られた変数係数の作用素Aに対して，同じことを示せ．

*）　偏微分方程式の研究センタ-の一つであるMinnesota大学において，数学者の間にかなり無邪気な冗談が飛び交っている：多くの大学では，数学者は数学上の訪問者に，その専攻が幾何であるか，代数であるか，解析であるか等々と尋ねるところであるが，Minnesota大学ではそれが楕円型か，放物型か，双曲型かと問うのである．

問題2. (*a*)　d'Alembert（または波動）作用素

$$Lu = u_{tt} - u_{xx}$$

は双曲型方程式に対する標準形の二つあるうちの一つにすぎない．他は

$$u_{rs}$$

である．方程式$u_{tt}-u_{xx}=0$を方程式$u_{rs}=0$に変換する1対1の1次変数変換$r=c_{11}t+c_{12}x$，$s=c_{21}t+c_{22}x$を求めよ．(*b*)　初等線形代数学を復習し，(*a*)で求めた変換行列をCとおいて，その逆変換

$$C^{-1}: \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

を求めよ．(*c*)　1次元Laplace方程式$u_{xx}=0$の解は幾何学的に何か？　また，$x=0$で$u(x)=0$かつ$x=b\neq 0$で$u(x)=1$とすると，その解は何か？

問題3.　ある直観を養うために，視察（すなわち，試行錯誤）によって，上述の基礎方程式の解を求めよ．

(*a*) $u_{xx}+u_{yy}=0$　(*b*) $u_{xx}-u_t=0$　(*c*) $u_{xx}-u_{tt}=0$　(*d*) $yu_{xx}+u_{yy}=0$
(*e*) $(1+(u_y)^2)u_{xx}-2u_yu_xu_{xy}+(1+(u_x)^2)u_{yy}=0.$

1.1　演習問題

1. 判別規則を次の方程式に適用せよ．
   (*a*)　$4u_{xx}+2u_{yy}+27u_y=0,$
   (*b*)　$4u_{xx}-2u_{yy}=0,$
   (*c*)　$4u_{xx}-u_y=0.$
2. 次を確かめよ．
   (*a*)　$u=\ln r$はLaplace方程式$\Delta_2 u=0$を満たす．ただし，$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\neq 0.$
   (*b*)　ガウシアン$(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2/4t}$は$t\neq 0$で熱方程式$u_t-u_{xx}=0$を満たす．
   (*c*)　移動正弦波$\sin(x+t)$は波動方程式$u_{tt}-u_{xx}=0$を満たす．
3. (*a*)　$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$が放物型のとき，変数変換

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = rx + y \end{cases}$$

によって，方程式は標準形

$$u_{\xi\xi}=0$$

に変換されることを示せ．ただし，$r=-B/A$.

(*b*)　$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$が双曲型のとき，変数変換

$$\begin{cases}\xi = r_1 x + y \\ \eta = r_2 x + y\end{cases}$$

によって，方程式は標準形

$$u_{\xi\eta} = 0$$

に変換されることを示せ，ただし，r_1とr_2は$Ar^2+2Br+C=0$の解とする．よって，$u=f(\xi)+g(\eta)=f(r_1x+y)+g(r_2x+y)$は常に上記の偏微分方程式の解である．ただし，$f$と$g$は任意の（2回微分可能な）関数とする．

（c）　$yu_{xx}+2xu_{xy}+yu_{yy}=0$を分類せよ．

1.2　通常の三つの型の問題

まず，応用において現われる三つの型の問題を考えよう*)．後で，三つの型の作用素と三つの型の問題の殆んどすべての関連について言及しよう．

1.2.1　境界値問題（今後，時にはBVPと略記される）

重要な例はかの有名なDirichlet問題である†)：

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = f, & x \in \partial\Omega.\end{cases}$$

ここでΩは指定された領域（これはまた範囲とも呼ばれ，n次元Euclid空間の連結な開集合である），fは与えられた境界値である（図1.2a）．

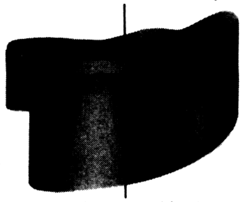


図 1.2a

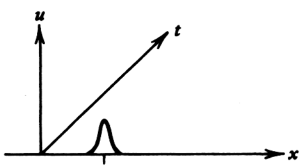


図 1.2b

1.2.2　初期値問題（今後，時にはIVPと略記される）

実例は（無限長の棒における）熱方程式である：

*)　このような問題を物理学的に導くことは後で，特に節1.7で議論される．

†)　これは18，19両世紀の数学の大半を占め（そして発想の因をなし）た．Dirichlet問題では，境界∂Ω上で連続なデータ関数fに対して領域Ωの閉包上で連続な解uを求めることが要求される．Dirichlet問題は理論的に，そのような解の存在が示されたとき，領域Ωに対して解かれたとみなされる．この問題の解決は大変無理のない領域に対してはPoincaréやHilbertその他の人々によって完成された．この問題に関するより詳しい歴史的注意に対して，節1.5.3を参照．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \quad t = 0. \end{cases}$$

ここで，fは与えられた初期温度分布で，$u(x, t)$は時刻$t>0$に対する温度分布である(図1.2b).

1.2.3　固有値問題*)（今後，時にはEVPと略記される）

簡単な例は次の常微分方程式（今後，時にはODEと略記される）である†)：

$$\begin{cases} -v'' = \lambda v, & 0 < x < \pi, \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

解（第二固有関数）は図1.2cに示されている．この方程式は振動弦の問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geqq 0, \\ u(x, 0) = f_1(x), & u_t(x, 0) = f_2(x) \end{cases}$$

を変数分離法で解くとき現われる(図1.2d)．このPDEは初期位置と初期速度が与えられ，両端で固定された弦の振動を述べている．ただし，線形性が保たれる程度に，変位は小さいものとする．前者（EVP）は常に**自明解**（すなわち，恒等的に0の解）をもつが，興味は**非零解**（**基本モード**）$v_n(x)$と対応するλ_n（固有値）のみであり，それらを用いて，振動問題の一般解が変数分離法によって構成される．

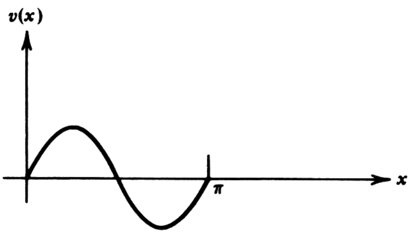


図1.2c

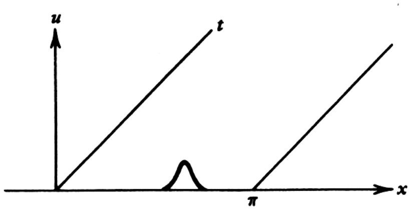


図1.2d

上に述べた振動問題は，境界値，初期値，固有値そして双曲型作用素や楕円型作用素を含むことに注意しよう．

復習や後での使用のために，上記Rayleighの固有値問題（1.2.3）の解法を常微分方程式論の初等的考察によってふり返ってみよう．方程式

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0$$

*)　これはまた，**特性値問題**とか**基本振動数問題**と呼ばれることがある．

†)　これはRayleighによるもので，**Rayleigh方程式**と呼ばれることがある．

に$v(x)=e^{zx}$を代入すると，いわゆる補助方程式

$$z^2 + \lambda = 0$$

と，二つの基本解

$$y_1(x) = e^{z_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{z_2 x}$$

が得られる．ここで，z_1とz_2は補助方程式の解$\pm\sqrt{-\lambda}$である．他の解はすべて二つの基本解の１次結合である．$\lambda<0$のとき，二つの実数値基本解

$$y_1(x) = e^{rx}, \qquad y_2(x) = e^{-rx}$$

を与える．$\lambda=0$のとき，いずれも定数関数を与えるが，二つの１次独立な基本解をもつために，次のようにとる：

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = x.$$

$\lambda>0$に対しては，上で得た基本解$e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$は複素数値であり，二つの１次独立な実数値解は，それらの実部と虚部をとって得られる：

$$y_1(x) = \cos\lambda^{1/2}x, \qquad y_2(x) = \sin\lambda^{1/2}x.$$

これら三つの場合，$\lambda<0$，$\lambda=0$，$\lambda>0$のそれぞれに対して，任意定数c_1，c_2をもつ1次結合$v=c_1y_1+c_2y_2$を作ると，境界条件によって，初めの二つの場合には自明解しかないことが，直ちにわかる．よって，問題の固有関数は

$$v_n(x) = \sin\lambda_n^{1/2}x, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

であり，対応する固有値は

$$\lambda_n = 1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$$

である．c_nを任意定数として，

$$v_n(x) = c_n\sin\lambda_n^{1/2}x$$

も，同じ固有値λ_nをもつ固有値問題に対する解であることに注意しよう．

問題1．(*a*)　視察により，Dirichlet問題を解け．ただし，Ωは単位正方形 $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$で，データ関数は次とする：

$$f(x, y) = \begin{cases} x, \ 0 \leqq x \leqq 1, & y = 0, \\ 1, \ x = 1, & 0 \leqq y \leqq 1, \\ x, \ 0 \leqq x \leqq 1, & y = 1, \\ 0, \ x = 0, & 0 \leqq y \leqq 1, \end{cases}$$

(b)　前問 (a) で，$y=0$と$y=1$の各辺上のデータを$f(x, y)=x^2$でおきかえたとき，多項式解は存在しないことを示せ．

(c)　更に進んだ演習として，次のいずれかを試みよ．(i) 前問 (b) の連続解を見出せ．(ii) ラプラシアンを極小曲面作用素でおきかえて研究せよ．

問題2．次の初期データに対して，熱方程式を視察によって解け．

(a)　$f(x)=1$；(b)　$f(x)=x$；(c)　$f(x)=x^2$.

問題3．次の初期データに対して，波動方程式を視察によって解け．

(a)　$f_1(x)=\sin x$；$f_2(x)=0$；(b)　$f_1(x)=0$, $f_2(x)=\sin x$；

(c)　(a) と (b) で $\sin x$ を $\sin 2x$ でおきかえた問題．

与えられた偏微分方程式に対する **"特性曲線"** の概念，およびそれらの特性曲線が初期値問題の可解性に関して初期データとどう関わるかについては，問題1.9.2や第3章，付録Aに見出される．

1.2　演習問題

1．境界値問題 (BVP) はそれが**内部問題**であるか，**外部問題**であるかに応じて区別されなければならず，通常前者からとりかかる．それはその解がより容易に理解されるものである．

(a)　次の内部BVPは正しく一個の解をもつことを示せ．

$$\begin{cases} u''(x)=0, & x\in\Omega=(-1,\ 1) \\ u(x)=f(x), & x\in\partial\Omega=\{x=\mp 1\text{の点}\}. \end{cases}$$

(b)　次の非有界BVPは厳密に一個の解をもつか，解をもたないか，あるいは無限個の解をもつかのいずれかであることを示せ．

$$\begin{cases} u''(x)=0, & x\in\Omega=(0,\infty) \\ u(x)=f(x), & x\in\partial\Omega=\{x=0,\infty\text{の点}\}. \end{cases}$$

(c)　次の外部BVPは無限個の解をもつことを示せ．

$$\begin{cases} u''(x)=0, & x\in\Omega=(-\infty,-1)\cup(1,\infty), \\ u(x)=f(x), & x\in\partial\Omega=\{x=\mp 1\text{の点}\}. \end{cases}$$

2．初期値問題 (IVP) は通常常微分方程式の入門課程における主題である．復習と幾つかの幾何学的理解のために，次のIVPを解け．

(a)
$$\begin{cases} u_t(x,\ t)=0, & -\infty<x<\infty,\quad t>0, \\ u(x,\ 0)=f(x), & -\infty<x<\infty,\quad t=0. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} u_t(x,\ t)+3u(x,\ t)=0, & -\infty<x<\infty,\quad t>0, \\ u(x,\ 0)=f(x), & -\infty<x<\infty,\quad t=0. \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} u_{tt}(x,\ t)=0, & -\infty<x<\infty,\quad t>0, \\ u(x,\ 0)=f(x), & -\infty<x<\infty,\quad t=0. \end{cases}$$

3. 固有値問題は与えられた物理系における振動の基本モ-ドに関係する．線形問題といわゆる非線形問題との間には大きな概念上の違いがある．

(*a*) 任意の線形固有値問題

$$Lu=\lambda u$$

に対して，固有関数uのスカラ-倍がまた固有関数であることを示せ．

(*b*) $v=100\sin 5x$がRayleigh固有値問題の解であることを確認せよ．

(*c*) 非線形固有値問題

$$u''=\lambda u^3(x)$$

の固有解$u_\lambda(x)$のスカラ-倍は一般に，固有解でなく，少なくとも同一の“固有値”λに対して固有解でないことを確かめよ．

1.3 通常の三つの疑問（およびその他の疑問三つ）

上記の型の問題が与えられたとき，通常次の三つの疑問が生ずる：

(1) **存在**（少くとも一個の解uの），

(2) **一意性**（すなわち，唯一解か零解か），

(3) **安定性**（解 $\{u\}$ のデ-タ $\{f\}$ への連続的依存性とも呼ばれる）．

また，これらと等しく重要な三つの疑問が，特に応用に現われる：

(1′) **構成**（“物理学的な”解の），

(2′) **正則性**（すなわち，見出された解がどの程度“微分可能”なのか），

(3′) **近似**（特に解の厳密な構成が可能でないとき）．

勿論実用的には，存在(1)を示す最良の方法は，すべての要求を初めから満たすように，もとの問題へ代入しても十分に正則な(2′)厳密解を構成すること(1′)である*)．もし一意性(2)が証明されたなら，それがその解である．不幸にも，また多くの常微分方程式に比べて，偏微分方程式の解表現はしばしば級数とか積分のような極限操作を含んでおり，解は一般に初等関数のようなまとまった形で表わし得ない．よって，例えば，実用上用いられる有限Fourier級数解は実際に近似デ-タfを用いた近似解(3′)でしかない．しかしながら，安定性(3)が示されているときには，デ-タに含まれる小さな誤差は解に僅かの誤差しかひき起さないし，通常はそれで満足すべきとする．

共通の術語で，(1)，(2)，(3)の示される問題は**適切な**あるいは**適合した**といわれる．そのかわりに，その数学的モデルは完全であり，整合的であるといってもよい．正しい型のデ-タ，初期条件，境界条件が与えられると，数学的解が厳密に決定される．このことは数学的モデルが物理学的問題をいかにうまく記述するかを述べているのではない．物理学の問題は考慮しなかった項に起因する解の異った性質をもつことがある．この疑問は数学によって明瞭にされ得るか否かというそのモデル形成の問題である†)

*) いろいろな方法が許される：例えば，Fourier展開，Green関数表現，積分変換，形式論理，変数変換，その他．

偏微分方程式の理論の中心に位置するこれら三つの疑問を，先に掲げた三つの例によって，詳しく議論しよう．図1.3aに描かれた**“好適な”**[§]有界領域Ω上の２次元Dirichlet問題を考えよう．直観的に見やすくするために，ラプラシアンΔの非線形版，すなわち，極小曲面作用素

$$Lu = (1 + (u_y)^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + (u_x)^2)u_{yy}$$

と，非線形極小曲面の問題

$$\begin{cases} Lu = 0, \boldsymbol{x}\in\Omega, \\ u = f, \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases}$$

を初めに考えることが教育的である．序論で論じたように，$f(x, y)$は輪状の針金と見られ，極小曲面はこの針金に張られた“石けん膜”と考えられる．Ω上の方程式は同次（零デ-タ）であるから，重力は無視されている．傾斜が小さいときには，$L \cong \Delta$．よってDirichlet問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \boldsymbol{x}\in\Omega, \\ u = f, \boldsymbol{x}\in\Omega \end{cases}$$

は，LとΔの曲率に関する条件が厳密に同じでないけれども，与えられた境界デ-タをもつ薄膜を含む問題と考えられる．

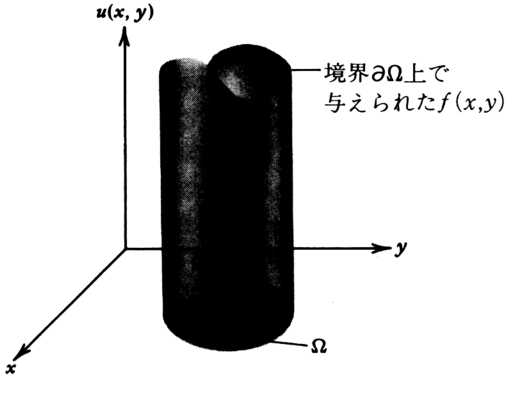


図 1.3a

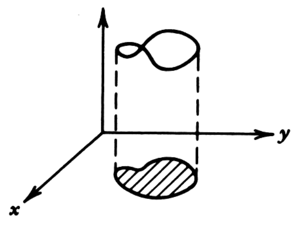


図 1.3b

†）例えば，次の問題2で与えられる解公式は，上で与えられた熱方程式のモデルが時には非現実的なものであることを示す．そこでは，モデルの線形化により，熱伝播の速度無限大が解にもち込まれている．このことは，時刻$t=0$で非常に小さい区間に集中されたデ-タ$f(x)$を考えることによって理解される．本節末の問題2を参照せよ．

§）“好適な（nice）”領域の疑問は微妙である（節1.6.1および問題1.9.5参照）．しかし，実用的な多くの領域Ωは，すべてうまくいくことがわかる．

この問題を直観的立場で進めると，直ちに，Dirichlet問題に対する見せかけの解(図1.3b)

$$\begin{cases} u(x, y) \equiv 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) \equiv f(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

を取り除くことができる．このように，興味あるいずれの解も境界$\partial\Omega$では少なくとも，連続でなければならないことがわかる．これは正則性の要請(2′)の例である．さて，Dirichlet問題を二つの線形条件，すなわち，Ωで$\Delta u=0$および$\partial\Omega$上で$Iu=f$ (Iは恒等作用素)の線形系として考えるとき，Lに対する妥当な“領域”はΩの閉包$\overline{\Omega}=\Omega+\partial\Omega$上で連続な関数$u(x, y)$の集合であることがわかる．同様に，2回微分したいので，uはΩ内で2回連続微分可能であることを要求するのは当然である*)．このような関数に対して次が容易に示される：

最大値の原理　Ωを任意の有界領域とし，$u(x, y) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$を$\Omega$の調和関数とする†)．このとき，$u$は$\partial\Omega$上のどこかで$\overline{\Omega}$上の最大値をとる．

次の問題は三つの型の疑問(1)，(2)，(3)を説明してくれる．

問題1．　(a) 最大値原理を用いて，有界領域上のDirichlet境界値問題(1)に対して関数族$C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$の範囲内で一意性(2)を示せ．($b$)　C^2の条件が適しているかどうかを論ぜよ．(c)　最大値原理から，安定性(3)に関する内容が得られるか？

問題2．　熱伝播の初期値問題(2)に対するPoisson表現公式§)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[-(x-y)^2/4t]} f(y)\, dy, \qquad t > 0$$

が与えられたとする．この公式は問題の解としてどんな関数族まで適用できるかを論ぜよ．デ-タfは非常に好適と仮定せよ．

問題3．　次の境界値問題を六個の疑問［(1), (2), (3), (1′), (2′), (3′)］に関して調べよ．

$$\begin{cases} u_{xx} + 4xu = 16, & 0 < x < 2, \\ u(0) = 0, \\ u(2) = -1. \end{cases}$$

*)　端的にいうと，$D(L)=C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$すなわち，$\Omega$内で連続な2階偏導関数$u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}$をもち，かつ$\overline{\Omega}$上で連続な関数$u(x, y)$の全体．一般に読者には任意の集合$S$に対する$C^k(S)$の意味は明らかでなければならない．“領域”なる言葉は二つの異った意味に用いられる．すなわち，(Ωに対する)幾何学的意味と，(Lに対する)関数の意味．どちらの意味も実は同じである．uは領域Ω上のxの関数であり，Lは領域$D(L)$に属する$u(x)$上の関数である．

†)　すなわち，Dirichlet問題と同様，Ωで$\Delta u=0$．

§)　これはGreen関数として知られる強力な解法の例であり，後で詳しく議論される．しかしながら，この方法は，Green関数の存在が知られているときですら，それを陽的にかき下ろすには多くの場合困難であり，それゆえ有用というよりはむしろ強力なのである．

これら三つの問題に関する幾つかの注意．問題1に関して，一意性を示すための（わずかながら一般性に欠ける領域Ωに対する）第二の一般的方法がある．それは**エネルギー法**として知られ，節1.6で論ぜられる．問題2は無限領域の複雑さと積分のもとでの微分演算に関する幾つかの復習を含む．この時点では，その問題は幾らか自由に答えられるようにしておく．ここまで到れば，読者諸氏は三つの疑問（および他の疑問三つ）に関する考察を始められるだろう．問題3は，常微分方程式であるけれども，本節の六個の疑問を与えるときに生じる数多くの考察を既に示唆している．

最大値の原理の証明に対しては，問題1.9.3を見よ．最大値の原理は楕円型と放物型の方程式に対して一意性の結果を得るのに用いられるが，双曲型の方程式に対しては一般的にそうはいえない．後者に対しては，エネルギー法や**特性解法**が用いられる．

解の存在は，初期デ-タが良ければ，初期値問題に対してかなり広く成り立つ．例えば，常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

に対する標準的な一般的存在の記述（**Picardの定理**）を思い出すことができる．完全を期すために，問題1.9.4で偏微分方程式に対する初期値問題へこの結果が簡潔に拡張される．それはいわゆるCauchy-Kowalevskiの定理である．

他の三つの疑問：

(1′)　解の構成

(2′)　正則性（すなわち，解の検証）

(3′)　解の近似

は存在(1)，一意性(2)，安定性(3)と同等の重要性をもつ．科学や他の応用において偏微分方程式を実際使うとき，疑いなく(1′)に，またそうでないときは(3′)に最大の注意を払うはずである．本書では，疑問(1)，(2)，(3)，(1′)，(2′)，(3′)の相対的価値に関して，あるバランスを保つよう心掛けたが，全体的には解の構成(1′)を強調することになった．ある種の問題に対する疑問(2′)の厳密な取扱いが節2.2に見られる．疑問(3′)に対する**数値的方法**は節2.6と第三章の付録Bに見られる．

1.3　演習問題

1.次の境界値問題に対して，(*a*) 存在，(*b*) 一意性，(*c*) 安定性を論ぜよ．

$$\begin{cases} u''(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = b, & u'(1) = a. \end{cases}$$

2.前問の境界値問題に対して，(*a*) 構成，(*b*) 正則性，(*c*) 近似を論ぜよ．

3.次の境界値問題に対して，(*a*) 存在，(*b*) 一意性，(*c*) 構成を論ぜよ．

$$\begin{cases} a_0(x)u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_2(x)u(x)=0, & 0<x<1, \\ u(0)=a, \qquad u(1)=b \end{cases}$$

1.4　通常の三つの型の“境界条件”

引用符をつけて“境界条件”としたのは，初期値と境界値がいずれも次の三つの型の一つとして，またはそれらの結びつきとして，度々現われるからである．前にDirichlet問題を考えたが，力F（たとえば重力）の場にある膜を記述しようとすると，その膜はいわゆるPoisson方程式

$$\Omega\text{内で} \qquad \Delta u=F$$

を満たし，次の型の境界条件のいずれかをもつ．

(1)　$\partial\Omega$上，$u=f$：**Dirichlet境界条件**

(2)　$\partial\Omega$上，$\partial u/\partial n=f$：**Neumann境界条件***)

(3)　$\partial\Omega$上，$\partial u/\partial n+ku=f$，$k>0$：**Robin境界条件**

これらはそれぞれ，(1)**境界固定膜**，(2)**自由膜**，(3)**弾性支持膜**に対応する．条件の結合，いわゆる“**混合**”問題も考えられ，例えば$\partial\Omega$の一部で固定，他の部分で自由になっている膜である．通常，Ωは好適な領域であると仮定する．

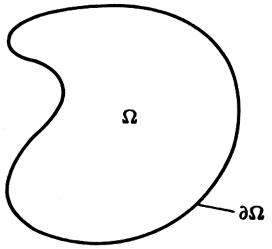


図 1.4.　典型的な好適領域

三つの型の境界条件はすべて，例えば，定常熱伝導問題，平板や膜の問題，静電気または重力ポテンシャルを含む問題，また流体動力学などに現われる（節1.7参照）．先の振動弦の問題では固定端，すなわち，Dirichlet(1)の境界条件，およびDirichlet(1)とNeumann(2)の両方の型をもつ初期データが用いられた．領域Ωが有界でないときには，問題を適切なものにするために，通常はある種の逓減率なる“無限遠での境界条件”が課せられる．これは，$x\to\infty$のとき$u\to0$のように簡単なこともあるし，もっと複雑な指定を要求されることもある．

*)　$\partial u/\partial n$は$\partial\Omega$の外向き法微係数を示す．すなわち，$\partial u/\partial n=\mathrm{grad}\,u\cdot \boldsymbol{n}$．ここで，$\boldsymbol{n}$は境界に垂直な外向きの単位ベクトルである．いちいち断らない限り，勾配grad$u$も（一意の）単位外向き法ベクトル$\boldsymbol{n}$も存在するとする．

このように，例えば，Laplaceの方程式に対して

Dirichlet問題： $\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上} & u=f, \end{cases}$

Neumann問題： $\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上} & \dfrac{\partial u}{\partial n}=f, \end{cases}$

Robin問題*)： $\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=0, \\ \partial\Omega\text{上} & \dfrac{\partial u}{\partial n}+ku=f,\ \ k>0 \end{cases}$

がある．これらの方程式のどれも，強制項Fは領域Ω内では存在しないと仮定されている．その様なFが存在すると，例えば，**Dirichlet-Poisson問題**

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u=F, \\ \partial\Omega\text{上} & u=f \end{cases}$$

となり，同様に**Neumann-Poisson問題**，**Robin-Poisson問題**も考えられる．

上述の様に，節1.2で与えた振動弦の問題，すなわち，

$$\begin{cases} \text{(i)} & u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<\pi, & t>0, \\ \text{(ii)} & u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geqq 0, & \\ \text{(iii)} & u(x,0)=f_1(x), & 0<x<\pi, & t=0, \\ \text{(iv)} & u_t(x,0)=f_2(x), & 0<x<\pi, & t=0 \end{cases}$$

は，$t>0$に対する（x，t）領域上0である“Poisson”データ(i)を，そしてすべての時刻tに対して弦の両端$x=0$，$x=\pi$でDirichlet境界条件(ii)，“Dirichlet”初期条件(iii)と“Neumann”初期条件(iv)をもつ．通常は，これらの条件の名称にこだわらず，むしろ，いろいろな条件によってどんな型の解の振舞いが期待できるかについて，何んらかの直観と経験を築き上げていくものである．ここで述べたことの大きな手助けとなるのは，いろいろな条件を物理学的により深く考えることである．

例えば，振動弦の問題において実際に，振動する弦を想像することができる．線形モデルがそれらしく正しくあるためには，微小振動についてのみ考えなければならない．“Dirichlet”境界条件は，弦の両端が固定支持され，かつ同一水平線上にある固定端なる条件と考えられる．この弦をピンと張った状態を想像しよう．誰かがその弦のある位置をつまみ上げて(iii)，時刻$t=0$の瞬間にそれを離して振動させる．指先の間に働く力の不均衡によって生ずる“真下に”その弦を離し損ねる程度は，彼が偶然にもその弦に与えた初期速度(iv)として現われる．

振動弦に対するNeumann端点条件は次の形をとる．

$$\text{(ii)}\quad u'(0,t)=u'(\pi,t)=0, \qquad t\geqq 0.$$

ここで，プライム（ $'$ ）はxに関する微分演算を示す．このとき，その振動が両端点で水平になる様な“羽ばたく”弦を見ることになり，よって，たとえ両端点が上下に動かされたにせよ，その弦は端点近くでは水平に保たれる．例えば，ぴしっと鳴るむちの端ではこの事が起っている．では他端では何が起っているか？

*)　係数kは，内容に応じて，変数であってもよいし，定数のこともある．

振動弦に対するRobin端点条件は次の形をとる.

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} u'(0,t)-k_1u(0,t)=0, \\ u'(\pi,t)+k_2u(\pi,t)=0. \end{cases}$$

ここで, k_1とk_2は正の定数である. 例えば, これは各端点でバネによって束縛された弦と考えられる. すなわち, その復元力が弦のふくらみの量に比例する場合である. この型に属する例の一つは各端点に立つポ-ルの先につけた輪で支持された綱の振動である.

これらの状態のどれかをモデル化するにせよ, 摩擦などの現実の物理学的状況において, 当然線形性の程度を考える必要がある. それにもかかわらず, たとえ近似的に過ぎないにせよ, 偏微分方程式の述べ得るものの物理学上の洞察は, 更に深い数学的考察に際して確固とした宝物になる.

問題1.　方程式$u''(x)=0$, $0<x<1$を次の境界条件のもとで解け.
　(a)　$u(0)=0$, $u(1)=1$；(b)　$u'(0)=0$, $u'(1)=1$；
　(c)　$-u'(0)+u(0)=1$, $u'(1)+u(1)=1$.
ここで, プライム（ ′）は常微分演算d/dxを示す.

問題2.　方程式$u''(x)=0$, $0<x<1$に対して, (a)　“混合”境界条件（一端でNeumann条件, 他端でRobin条件）すなわち$u'(0)=0$, $u(1)+2u'(1)=1$のもとで解け.
　(b)　$u(0)=0$が与えられたとき, $x=1$でどんな型の境界条件が用いられるか？
　(c)　(a) と (b) から一般的結論を導いて, それを証明せよ.

問題3.　方程式$u''(x)=0$, $0<x<1$と定数$k>0$に対して, 次の境界条件のもとで解け. (a)　$-u'(0)-ku(0)=0$, $u'(1)-ku(1)=0$, (b)　$-u'(0)-ku(0)=1$, $u'(1)-ku(1)=1$. また, (c) 問題

$$\Omega\text{内で}\qquad \Delta u=0,$$
$$\partial\Omega\text{上}\qquad \partial u/\partial n-ku=f$$

に対する一般的結果の型を考察せよ. この型の境界条件はRobin境界条件と区別されるべきで, 時には**Steklov境界条件**と呼ばれる.

節1.3で述べた様に, 初期デ-タが解析的, 方程式の各係数も解析的であり, かつある種の他の条件を満たしているとすると, そのデ-タの近傍で一意的な解析解の存在を保証する一般的な定理がある. その定理（**Picard-Cauchy-Kowaleski**）は問題1.9.4に見られる. この様に, 本節で考えた“境界条件”, 例えばDirichlet条件, Neumann条件, Robin条件, 弾性条件, 混合条件, Steklov条件等々のどれに対しても, “局所初期条件”と見なされるこれらの“境界条件”をもつ偏微分方程式は, 必要ならもっとデ-タを加えて, 境界の近くで局所解をもつ様に示すことができる.

この様に，偏微分方程式，とりわけ境界値問題に対して，存在性の疑問に関する仕事は局所的よりもむしろ大域的な解を確立することにある．そして，それを行なう最良の方法は，可能な限り，実際に解を構成することである．

1.4 演習問題

1. 次の境界条件を述べよ．

(a)　$u(r)=0$．ただし，$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=1$

(b)　$\partial u(r)/\partial r=0$．ただし，$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=1$

(c)　$\partial u(r)/\partial r+3u=0$．ただし，$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=1$

2. (a)　外部Dirichlet問題，$r>1$で$\Delta u=0$，$r=1$上$u=c$が二つの解をもつことを示せ．ただし，$x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$r=\ (x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)^{\frac{1}{2}}$．

(b)　唯一解を得るためには，どんな境界条件を加えればよいか？

(c)　$r=1$での境界条件を別に定めて，もう一つの解を求めよ．

3. 解を求めずに，一般のDirichlet-Poisson問題

$$\begin{cases} u''(x)=F(x), & 0<x<1, \\ u(0)=a, & u(1)=b \end{cases}$$

の解の一意性あるいは非一意性を，次によって証明せよ．

(a)　幾何学，(b)　最大値の原理，(c)　微積分学．

1.5 通常の三つの解法（付：歴史上の注意）

大雑把にいって，偏微分方程式を解くための解析的方法は，次の三つがある．

(1)　**変数分離法**（またはFourierの方法，あるいは**固有関数展開**による解法）

(2)　**グリーン関数法**（または**基本特異関数**，あるいは**積分方程式**による解法）

(3)　**変分的定式化法**（または**エネルギー法**，あるいは**変分法**）

これら三つの方法を，既に上で与えた問題例によって説明し，後節でより詳しく論ずることにする．

1.5.1 変数分離法

変数分離法*)を説明するために，再び両端固定の振動弦の問題を考えよう（図1.5 *a*）：

$$\begin{cases} \text{(PDE)} & u_{tt}-u_{xx}=0, \quad 0<x<\pi, \quad t>0, \\ \text{(BV)} & u(0,t)=u(\pi,t)=0, \quad t\geq 0, \\ \text{(IV 1)} & u(x,0)=f(x), \quad 0<x<\pi, \\ \text{(IV 2)} & u_t(x,0)=0, \quad 0<x<\pi. \end{cases}$$

*)　歴史的には，この方法を初めて用いたのはDaniel Bernoulli (1755) で，振動弦の問題に対してであった．

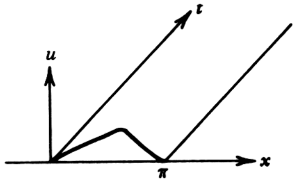


図 1.5a

簡単のため，第二初期条件（IV2）では初期速度を0に仮定した*)．解に対して“分離された”変数をもつ形 $u(x,\ t)=v(x)w(t)$ を期待して，PDEに代入すると，次を得る：

$$v(x)w''(t) - v''(x)w(t) = 0.$$

このとき，各時刻でuは0にならないと仮定して，上式をuで割ると

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \text{ある定数，すなわち } -\lambda.$$

何故なら，xの関数に等しいtの関数は定数でなければならない．$u(x,\ t)=v(x)w(t)$が(BV) $u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0$を満たすために，$v(0)=v(\pi)=0$を要求することで十分であり，かつ妥当である．よって，先に与えたEVP3，すなわち

$$\begin{cases} -v''(x) = \lambda v(x), & 0 < x < \pi, \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

となる．ODE（節1.3）から，この問題は無限個の解$v_n(x)=$(任意定数)$\sin nx$と対応する固有値$\lambda_n=n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$をもつ．$u(x,\ t)=v(x)w(t)$が（IV2）を満たすために，$w'(0)=0$とすればよく，ここで決められた各λ_nに対して，上記の関係から，（IVP）は

$$\begin{cases} -w''(t) = \lambda_n w(t), & t > 0, \\ w'(0) = 0. \end{cases}$$

ODEから，この問題は解$w(t)=$（任意定数）$\cdot\cos nt$をもつ．結局，無限個の解の候補

$$w_n(x,\ t) = (\text{任意定数})\, v_n(x) w_n(t) = c_n \sin nx \cos nt$$

が得られる．各$u_n(x,\ t)$がもとの問題の（PDE），（BV），（IV2）を満たすことは容易に確められる．

*)　物理的には，これはその最初の位置$f(x)$から厳密に垂直に弦を離すことができることを意味する．動力学的には，親指と人差指の間に何んら均衡を失うことなく，そうできることである．しかし，$f_1=0$でf_2の与えられている他の場合も同様にして取扱うことができる．このときは，弦は真直ぐに張られ，初期変位がなくて，t方向に突いた場合に相当する．両データ（IV1とIV2）が存在する場合の解は，それぞれの解を加えて見出される．数学的には，このことは線形性から許される．

ここで，初期条件（IV1），すなわち$u(x,\ 0)=f(x)$を満たすことが残されている．それは，fそれ自身が基本モードsinnxの倍数でない限り，解候補$u_n(x,\ t)$のいずれによっても満たされることはない*)．

さて，$u_n(x,\ t)$の最も一般的な“1次結合”，すなわち

$$u(x,\ t)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,\ t)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \cos nt$$

を作ると，次の三つの数学的な疑問に直面する：

1.先づ，無限級数(解)は（PDE）に対して意味をなすか？　すなわち，

$$\Box u(x,\ t) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Box u_n(x,\ t)\ =\ 0$$

となる様に項別に微分できるか？（$\Box=\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2$）これが可能なら†)，$u(x,\ t)$はこの問題の（PDE），（BV），（IV2）を満たすことになる．次いで，第二の疑問が生ずる．

2.

$$u(x,\ 0)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \overset{?}{=} f(x);$$

すなわち，解候補で初期変位（IV1）が得られるだろうか？　いいかえると，“どんな”関数$f(x)$もFourier正弦級数で表わし得るのか？　それが可能なら‡)，形式的に初等微積分学のWallisの公式を用いて，次を得る：$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin mx\, dx\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx\ =\ c_m \cdot \frac{\pi}{2}.$$

このようにして，（Fourier）係数c_mが決定され，よって変数分離解が確定する．

3.$u(x,\ t)$は“物理学的な”解なのか？　これに対しては，$t>0$で$u(x,\ t)\equiv 0$かつ$u(x,0)=f(x)$のような見せかけの解を除くように，十分な連続性と正則性(2′)をもつ（問題の領域$D(L)$における）関数uのクラス内で一意性の証明を与えれば十分で

*）　Bernoulliの論争上の発想（1755）は，任意の初期変位$f(x)$がそれ自身この様な正弦関数の1次結合であって，数多くのモード$u_n(x,\ t)$が解として適当に結合されていれば十分であるとすることであった．係数の計算は1777年にEulerによって最終的に解決された．1760年にLagrangeも独立に振動弦の問題に対して変数分離を用いたし，d'Alembertは1746年に他の方法（節2.5参照）を用いてそれを解いている．

†）　そして，ここで必要なものは一様収束性を示すことである．これは高等微積分学から知られていることである．詳しくは節2.2で論ぜられる．

‡）　fが任意の2乗可積分関数である場合は，通常Lebesgue積分論におけるRiesz-Fischerの定理である（*Compt.Rend.Acad.Sci.Paris* **144**（1907））．彼等はL^2とl^2の同値性を示し，一系としてこれを与えた（訳者注：Riesz, 615-619,734-736;Fischer,1022-1024,1148-1150）．Fourier係数を最初に示したのは，Eulerであったが，Fourierなる名称は彼の著：*Théorie analytique de la chaleur*（1822）で行った熱伝導問題の理論の中で，この展開を用いたことに由来する．

ある．ここに，見せかけの解とは節1.3で論ぜられた病理的で興味の乏しい解と同類のものである．これを論ずるのには，幾つかのやり方があるが，それらは後にまわそう．

同様にして，他のPDEも後で知るように，変数分離法で解かれるものもある．幾何学的設定が異なるとき(例えば，長方形でなく球形)，大変自然に，正弦関数や余弦関数以外の固有関数を用いたFourier展開にしばしば出会う*)．けれども領域が例えば有界でないとき，上の$\lambda_n=n^2(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$の様な固有値に対応する固有関数が任意の関数の展開にとって十分完備でないという状況に出会うことがある†)．この種の問題の幾つかの局面については節2.7で論ぜられ，λの連続集合に対応する固有関数によって解きなおされ，解uは級数に代って積分によって与えられる．

問題1．(a)　三辺でデ-タが0の図1.5bに示されたDirichlet問題(1)を変数分離法によって解け．(b) 線形性と変数変換とによって，すべて四辺上にデ-タをもつ問題を，型 (a) の四つの問題にわけて解く解法を論ぜよ．

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$$

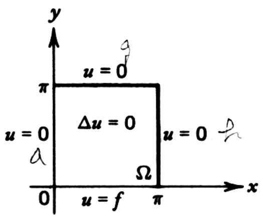


図 1.5b

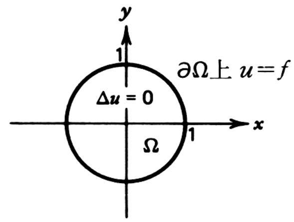


図 1.5c

問題2．(a)　ラプラシアンΔを極座標で表わせ（微積分学の復習)．(b)　図1.5cに示されたDirichlet問題(1)を，形式的に変数分離で解け．ただし，領域Ωは単位開円板である．

問題3．(a)　問題1，問題2でそれぞれ，$f(x)=x$，$f(\theta)=\theta$とするとき，これらを具体的に解け．すなわち，それらのFourier係数を求めよ．(b)　デ-タがそれぞれe^x，e^θのときはどうか？

変数分離法を終える前に，また問題1～3にも関係しているので，文献に見出される二，三の約束に触れておこう．c_nはこれまでの様に一般Fourier係数を示すために用いられる．すなわち，関数fを固有関数集合 $\{\varphi_n\}$ によって展開するとき，次の

*)　例えば，Legendreは回転体の引力の性質に興味をもち (1784-85)，変数分離法によって解いた．そのとき，現在彼の名の冠せられている多項式による固有関数展開が用いられた．(1826年Geneva湖でSturmとColladonによって行なわれた実験に関する）音波の伝播理論の問題に大いに触発されて，1836年SturmとLiouvilleは2階常微分方程式に対する固有関数展開の一般論を発展させた（節2.4参照)．

†) この様なλ_nは微分作用素Lの“点スペクトル”と呼ばれるが，今ここで述べる様に，例えば分光学に見られる“連続スペクトル”も存在する．これらの概念は第2章でより深く考察される．

様にかく．

ここで，$c_n=(f,\ \varphi_n)$ は問題に対する適当な内積*)である．例えば（φ_nを正規化して），

$$c_n = \int_0^{\pi} f(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

ここで，$\varphi_n(x)=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\sin nx$，$(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$は正規化因子，である．ここで，$\varphi_n$は“長さ”$(\varphi_n, \varphi_n)=1$となるように予め正規化されている．例えば，3次元Euclid空間の場合にも，このやり方を暗黙のうちに行っている．このとき，$\{\varphi_n\}$ は基底ベクトル$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$であり，その後の正規化は必要ない．一方，古典的な扱いは，結果として正規化と同値であるが，$\varphi_n(x)=\sin nx$のような正規化されていない基底ベクトルに対しては，係数$c_n=(f,\ \varphi_n)/(\varphi_n,\ \varphi_n)$ が用いられてきた．

上の問題2および一般に区間$-\pi<\theta<\pi$上の正弦関数や余弦関数による関数$f(\theta)$を展開する問題に関連して，一般の関数の場合は両三角関数とも必要である．何故なら，正弦関数はすべて奇関数であり，余弦関数はすべて偶関数であるからである†)．データfが0のまわりで偶関数であると正弦項は消え，逆にfが0のまわりで奇関数であれば余弦項は消える．しかし一般には，それらすべてが存在するはずである．古典的な記号法では，$-\pi<\theta<\pi$上で$f=\sum c_n\varphi_n$を次の形式にかいている．

$$f = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

ここで，$a_n=\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$，$n=0, 1, 2, \cdots$，$b_n=\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$，$n=1, 2, 3, \cdots$．このようにFourier係数は，固有関数 $\{\varphi_n\}$ と同様に，余弦係数 $\{a_n\}$ と正弦係数 $\{b_n\}$ に分解されている．ここで，正規化因子は

$$\begin{aligned}(\varphi_n, \varphi_n)^{-1/2} &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 n\varphi\, d\varphi\right)^{-1/2} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\varphi\, d\varphi\right)^{-1/2} = \pi^{-1/2}\end{aligned}$$

である．上の表示は普通fの**三角級数**あるいは**三角Fourier級数**と呼ばれており，節2.1で述べられる他の型の固有関数 $\{\varphi_n\}$ による展開と区別される．

問題2を解くに当って，形式$u(r,\ \theta)=R(r)\Theta(\theta)$の解を試みると，次の分離されたODEになる．

*)　“スカラー積”，“ドット積”などの言葉も用いられる．詳しくは節2.3を見よ．

†)　関数fが点0のまわりで奇関数であるのは，$f(-\theta)=-f(\theta)$の成り立つときであり，$f(-\theta)=f(\theta)$ のときは点0のまわりで偶関数である．すなわち，それぞれ“原点対称”，“y軸対称”である．

$$-\Theta''(\theta) = \lambda\Theta(\theta), \qquad -\pi < \theta < \pi,^{*)}$$

および

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \qquad 0 \leqq r < 1.$$

固有値λ_nと固有関数Θ_nを決める境界条件は何であろうか？　ここで，Dirichlet問題に対して$u \in C^2(\Omega)$となることに留意して，少なくともC^1級の内部連続性†)を保証するために，次を指定する．

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \text{ および } \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi).$$

すると，このODEの固有値問題の解の両端点での連続性によって，$\Theta''(-\pi) = \Theta''(\pi)$となる．

$\Theta(\theta)$に対する先の固有値問題から，$\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)と対応する三角固有関数Θ_nに到達する．$R(r)$に対して，このλ_nをもつ方程式の一般解は$R_n(r) = c_1r^n + c_2r^{-n}$, $n \neq 0$, $R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r$である‡)．ここで，$r=0$の近くで$R_0(r)$が有界であるという境界条件を与えると，c_2の項は消え，よってもとのPDEに対して要求した内部正則性$C^2(\Omega)$に再び注目したことになる．問題2について残りの詳細は諸氏にまかせよう．

問題3で，境界デ-タは不連続になっているが，それにも拘らず，後でわかる様に，変数分離法はなお領域内部においてPDEの解uを与えてくれる．一般に，Fourier級数は跳びをもつデ-タの平均値に収束すると期待される．

関連した疑問は，問題1における様な領域の“かど”で，デ-タfが連続であるかどうかについての解の正則性である．これは，例えば，平面応力や変形を記述する4階(例えば，作用素$L = \varDelta^2$をもつ)楕円型問題において生ずる興味ある一層複雑な疑問であるが，ここではこの点にこれ以上立ち入らない．

境界$\partial\Omega$それ自身の不連続性の影響をみるには，かどでほんの僅かなぎざぎざをもつ正方形状の針金に張られた石けん膜の例をとればよい．もとの正方形状の針金が十分に滑らかでなければ，もっと滑らかになる様に細工するだろう．境界値問題の殆んどの取扱いでは，境界が滑らかでないときでも，多少とも好適な滑らかな境界が仮定される．かどの取扱いは一層注意を要することである．

以上の注意でもって，形式的な位置付けでの変数分離法を終える．存在，一意性，安定性の三つの数学的疑問は，次章で，高等微積分学，Fourier級数，偏微分方程式

*)　$0 < \theta < 2\pi$あるいは長さ2πの区間を用いて，単位円をパラメ-タ化することがある．上のものは最も普通のものである．

†)　多くの教科書はこの点に関して驚く程曖昧である．すなわち，周期解等々に対する要求を述べてはいるが，それはかなり同値とはいえ，それでも尚正則性は，後で取り入れられた実在的概念であることをはっきりさせていない．

‡)　この方程式はODEのEuler方程式と認めてもよいし，確定特異点をもつODEに対するべき級数法を用いても，この形式の解をもつことがわかる．初等常微分方程式の著書かあるいは，確定特異点に関する情報をもっと欲しいときは，例えば問題2.9.4で与える文献を見よ．

論からの考察によって，変数分離解を用いてより深く扱われる．最後に，次の事を強調しておきたい．偏微分方程式に出会ったら，変数分離法をまず進んで試みよ．それは，PDEの解を得て，それによって解の疑問（構成，正則性，近似）に明快に答える最も有用な具体的な方法を与えるからである．

1.5(1)　演習問題

1. Fourier正弦係数

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

を次の関数に対して計算せよ．

(*a*)　$f(x)=\sin x$　　(*b*)　$f(x)=\sin^3 x$　　(*c*)　$f(x)=x(\pi-x)$

2. 本文で導いた一般解の公式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \cos nt$$

を用いて，次の初期分布をもつ振動弦の問題の変数分離解を求めよ．

(*a*)　$f(x)=\sin x,\ 0<x<\pi,$　　(*b*)　$f(x)=\sin^3 x,\ 0<x<\pi,$

(*c*)　$f(x)=x(\pi-x),\ 0<x<\pi$

3. 熱方程式の問題

(PDE)　$u_t-u_{xx}=0,\qquad 0<x<\pi,\ t>0,$

(BV)　$u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0,\qquad t\geqq 0,$

(IV)　$u(x,\ 0)=f(x),\qquad 0<x<\pi$

を，次の場合に対して解け．

(*a*)　$f(x)=\sin x$　　(*b*)　$f(x)=\sin^3 x$　　(*c*)　$f(x)=x(\pi-x)$

1.5.2　Green関数法

PDE $Lu=f$を“反転させる”最も一般的な*)方法はGreen†)関数の使用である．ここで，“反転させる”としたのは，行列方程式$A\mathbf{x}=\mathbf{y}$を解く際，逆行列A^{-1}を計算したのと同じ精神に従って，“逆”作用素L^{-1}を求めて，解を$u=L^{-1}f$とかくことができ

*）例えば，変数分離法は，領域Ωが長方形，球，円筒形の様なある特別の幾何学的領域でなければ，使えない．一般の2次元領域上でそれを試みるだけで，それがわかる．λ_nはもはや一つの座標位置に独立でなくなるからである．一般的にいって，Green関数法は任意の領域に対して適用されるが，それは“大域的に”ではなく，“点別に”解が得られるという局所的な不便さがある．また，問題に対するGreen関数を見出すことは恐らく困難である．

†）後述のGreen等式の場合と同様，Green関数とその呼称は次による．George Green：*Essay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism*（1828）．

るからである．通常この方法を採用するとき，L^{-1}の表現は，核$G(P, Q)$を問題に対するGreen関数とする積分作用素‡)を用いて，得られる：

$$u(P) = \int_\Omega G(P, Q)f(Q)\, dV_Q, \qquad P \in \Omega.$$

この解表現は，A^{-1}が行列の場合にはデ-タ$\mathbf{y}$の“重み付け”とみなされる様に，デ-タfの“総和と同時重み付け”と解釈され得る．

Green関数の理論の分野は広く，かつしばしば入り組んでいる．ここでは，数学と物理学の双方に関係する三つばかりの話題に限定しよう．偏微分方程式に対して，多くのGreen関数は点Qが点Pに近づくとき，特異となる．しかしながら，Green関数の最初の例は特異でなく，事実ODEにおける定数変化法による解以外の何物でもない．

Lで1次元Dirichlet-Poisson問題

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

を示そう．よって大雑把に，$Lv=f$とかかれる（通常Lはまた，領域上での作用素-Δに加えて，恒等作用素Iが境界上でvを0のデ-タの上に写像することをも意味していると解釈する）．ODEから，同次方程式$-v''=0$は二つの基本解$\varphi_1=1$，$\varphi_2=x$をもち，定数変化法の公式(問題1参照)によって，非同次方程式$-v''(x)=f(x)$の一般解は

$$v(x) = c_1 + c_2 x + \int_0^x (s - x)f(s)\, ds$$

であり，境界条件を入れて，

$$c_1 = 0 \quad \text{および} \quad c_2 = \pi^{-1}\int_0^\pi (\pi - s)f(s)\, ds$$

が得られ，よって

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^\pi \frac{x(\pi - s)}{\pi} f(s)\, ds + \int_0^x (s - x)f(s)\, ds \\ &= \int_0^x \left[\frac{x(\pi - s)}{\pi} + (s - x)\right] f(s)\, ds + \int_x^\pi \frac{x(\pi - s)}{\pi} f(s)\, ds \\ &= \int_0^\pi G(x, s)f(s)\, ds. \end{aligned}$$

‡) この様な積分作用素はLiouville(1832)に始まり，Neumann(1877)により用いられ，FredholmおよびHilbert (1899) により改良されて，一般領域におけるDirichlet問題が最終的に解かれた．

このとき，Green関数$G(x, s)$は

$$G(x, s) = \begin{cases} s(\pi - x)/\pi, & s \leqq x, \\ x(\pi - s)/\pi, & s \geqq x. \end{cases}$$

この例は多くのGreen関数のもつ数多くの性質を示している．例えば，対称性$G(x, s)=G(s, x)$，特定の領域や特定の境界条件への依存性（ここではπ）などである．*）

Green関数の第二の解釈は，熱伝導の様な物理学の問題で，点熱源を生ぜしめる基本特異性にある．節1.7に見られる様に，線形化の仮定のもとで，冷却物体の熱の流れは熱方程式で述べられる．$u(x, y, z, t)$を温度として，

$$u_t - \Delta u = 0.$$

定常の場合，すなわち，時間に依存しない流れでは，$u=u(x, y, z)$となり，その分布に対する方程式は

$$\Delta u = 0$$

である．この様な定常的な外向きの熱の流れ（図1.5d）を考えると，点Pにある熱源を必要とし，それは特異な関数

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}}$$

によって与えられる．ここで，点P（座標が(x, y, z)）はΩ内に固定されていると見なされ，点Q（Pとは異なる物体の内部あるいはその境界上の点）は$\overline{\Omega}$上を動くとする．r_{PQ}はP，Q間のEuclid的距離を示す．このとき，特異な関数$S(P, Q)$をこの流れに対する熱源関数と解釈できることは次の様にして示される：まず，$S(P, Q)$は$\Omega-\{P\}$で調和である．すなわち

$$\Delta_Q S(P, Q) = 0, \qquad P \neq Q.$$

Pのまわりにε-球（図1.5e）をとると，$|P-Q|=\varepsilon$上の温度変化の割合は熱の流れ

$$-k\ \mathrm{grad}_Q S(P, Q) = \frac{-k\mathbf{n}}{4\pi\varepsilon^2}$$

で与えられる．ここで，$\mathbf{n}$は$|P-Q|=\varepsilon$上の単位外向き法線，kはそこでの物質の熱伝導度†）を示す．係数kを1と正規化して，球面$|P-Q|=\varepsilon$上で積分すると，1秒

*）一般にPDEに対するGreen関数は非自明な実体とみなされるべきで，それは作用素，境界条件および領域の幾何学の様な問題に関するあらゆる情報を含むので，見出すのは恐らく容易でない．

†）kの単位はここではcal/secである．熱伝導の詳しい議論は節1.7を見よ．

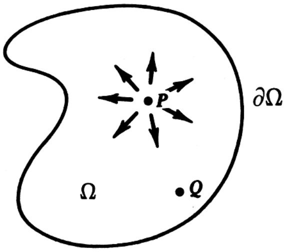


図 1.5d

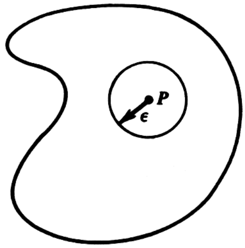


図 1.5e

間に球面 $|P-Q|=\varepsilon$ を通って，球体 $|P-Q|\leqq\varepsilon$ からその外部へ流れ出る熱量1カロリ-が得られる．それは球面 $|P-Q|=\varepsilon$ を通過する熱流束を計算してわかる．すなわち

$$\int_{|P-Q|=\varepsilon} -k\ \mathrm{grad}_Q S(P,\ Q)\cdot \mathbf{n}\ ds = 1.$$

この議論は ε に依存しないから，ε は任意に小さくとれるし，$S(P,\ Q)$ は点 P にある単位熱源によるΩ内の温度分布であるとの解釈が可能である．

このことは（Diracの）デルタ関数的性質と呼んでいるものを用いたGreen関数の第三の解釈へと導く．詳しくいうと，その議論は特異積分の計算法に依存する．それに関しては当分の間放置しておく（問題2，問題3参照）．この第三の解釈で，**“基本解”** または **“デルタ関数”** の関係は

$$-\Delta_Q S(P,\ Q) = \delta(P,\ Q)$$

とかかれる(第二の解釈から，$S(P,\ Q)$ が $P\neq Q$ で調和であることを想起せよ)．ここで，デルタ“関数” $\delta(P,\ Q)$ は，$P\neq Q$ のとき $\delta(P,\ Q)=0$ で，Ω上の任意の滑らかな関数 w に対して

$$\int_\Omega w(Q)\delta(P,\ Q)\ dV_Q = w(P)$$

なる性質によって与えられる量*)であると定義される．Poisson-Dirichlet問題

$$\begin{cases} \Omega内で & -\Delta u=F, \\ \partial\Omega上 & u=0 \end{cases}$$

の解 $u(P)$ を見出すために，上述の $\delta(P,\ Q)$ （“point　evaluator”として）の性質を用いよう．解 u が存在し，かつ十分に正則であると仮定する．よって，∂Ω上で消える任意の関数 v を掛けて，次の様に積分することができる：

*)　これは存在するが，関数でなく，むしろ **“測度”** である．ここでは，デルタ関数に対していかなる測度論的な見方をも必要としない．

$$\int_\Omega vF = -\int_\Omega v\,\Delta u = -\int_\Omega u\,\Delta v.^{*)}$$

さて，関数$u=v(P,\ Q)\equiv G(P,\ Q)\equiv S(P,\ Q)+g(P,\ Q)$が存在すると仮定する．ここで，$S(P,\ Q)$は上で与えた基本特異関数で，$g(P,\ Q)$は$\Omega$内で$\varDelta_Q g(P,\ Q)=0$を満たし，$\partial\Omega$上の$Q$に対して$G(P,\ Q)=0$なる様に$S(P,\ Q)$を“調整する”補正項である．これらを上式に代入し，デルタ関数の性質$-\varDelta_Q G(P,\ Q)=\delta(P,\ Q)$を用いると，

$$u(P) = \int_\Omega G(P,\,Q)F(Q)dV_Q\,.$$

よって，Poisson-Dirichlet問題の解が得られた．

問題1．(ODEの復習)（a）　方程式$-v''=f$に対して，本節で用いた定数変化法の公式を導け．（b）　次の混合問題に対するGreen関数を見出せ．

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ v(0) = 0, \\ v'(\pi) = 0. \end{cases}$$

問題2．（a）　定数変化法によって，上で求めたDirichlet-PoissonのGreen関数が実際に次を満たす意味で，基本特異関数および“デルタ関数”の性質をもつことを示せ．

$$\begin{cases} \text{方程式；} & -\Delta_s G(x,\,s) = 0,\ s \neq x, \\ \delta\text{の性質；} & \dfrac{dG(x,\,s)}{ds} = H(x,\,s), \\ \text{境界条件；} & G(x,\,0) = G(x,\,\pi) = 0. \end{cases}$$

第二式で，$H(x,\ s)$†)は図1.5fに示される階段関数である．ただし，$s\neq x$.

（b）　$G(x,\ s)$を丁ねいにえがけ．（c）　問題1（b）に対してもこの（a）と（b）を繰返せ．

*)　二番目の等式はGreenの第二等式（節1.6.1参照）であり，これは発散定理を用いて，部分積分法によって直接確認できる．読者は１次元の場合について，微積分学の通常の部分積分法によってそれを確かめるがよい．

今後，簡単のため，積分の意味が明瞭なときには，dV，ds，dx等々の表現を省略することがある．また，$\varDelta_Q$とかdv_Qなど本文で用いた記法は，Qが変数であることを意味し，Pは任意ではあるが固定されているものと見なす．

†)　$H(x,\ s)$は“Heaviside”関数と，広く呼ばれている．

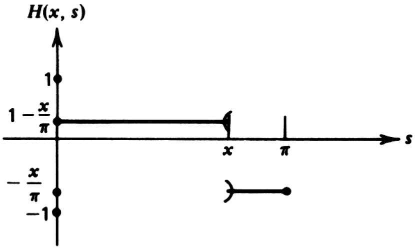


図 1.5f

問題3. Poisson核 $(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-(x-y)^2/4t\right]$ は，次を示すことによって，熱伝導問題(2)に対するGreen関数であることを示せ．(*a*)　yを固定したとき，それは熱方程式$u_{xx}-u_t=0$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$を満たす．(*b*)　それは$t=0$における初期値を再生するための“デルタ関数”の性質をもつ．

1.5(2) 演習問題

1. 定数係数の常微分方程式

$$ay''+by'+cy=0$$

に対して，次の三つの場合の解を復習せよ．(*a*)　互いに異なる実数解，(*b*)　実数の重複解，(*c*)　共役な複素数解．

2. 常微分方程式に対するGreen関数は，方程式

$$ay''+by'+cy=f(x)$$

の一般解

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x)$$

に境界条件を適用して得られる．ここで，$y_H(x)$は演習問題1の同次方程式の解$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$であり，$y_P(x)$ は非同次方程式の特解を示す．

(*a*)　$y_1(x)$と$y_2(x)$に対して，三つの場合を復習せよ．(*b*)　$y_P(x)$を求める定数変化法の公式を思い出せ．(*c*)　何故Green関数は形式$y_1(x)y_2(s)$なる積の積分を含むことになるのか？

3. “デルタ関数”は背後に一般化関数，測度，超関数の大きな理論をもち，実際，その完全な微積分法はこれ等の構造を正当化する．けれども，惹き起される混乱の多くは**“デルタ汎関数”**の概念から出発することによって避けられる．デルタ汎関数は単純に，関数$u(P)$を指定された点$Q=P$でのその値に写像する変換δ_Pとして定義される．

(*a*)　術語**“汎関数”**は，通常数学に於いては，関数から実数とか複素数とかのスカラ-への写像に当てられている．デルタ汎関数δ_Pはどんな場合か？

(*b*)　“汎関数”はまた，特に異なることが述べられない限り，暗黙のうちに線形と仮定される．δ_Pに対してはどうか？

（c）　次に，例えば本文で示したGreen関数解

$$u(x) = \int_0^\pi G(x, s) f(s)\, ds$$

がどんな意味をもつか，“デルタ関数”と“デルタ汎関数”を用いて説明せよ．

1.5.3　変分的方法*)

変分的方法を議論するとき，一般の変分法における数多くの疑問に出会う．後節で，偏微分方程式の研究に関係して，これらの疑問のより進んだ見解を考える．入門的なここでは，先ず有名なDirichlet原理と偏微分方程式におけるその歴史的意義および一般に数学に制限して，話を進める．†)

さて，次のDirichlet問題（正則性条件を陽に指定して）考えよう．

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} \Delta u = 0, & u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \\ \partial\Omega \text{上}\ u = f, & f \in C^0(\partial\Omega). \end{cases}$$

Dirichlet原理（関数や領域に正則性を何ら仮定せずに述べられた）の主張する事柄は，$\partial\Omega$上でfに等しいすべての関数vから，エネルギ-積分

$$D(v) \equiv \int_\Omega |\mathrm{grad}\ v|^2$$

を極小にするものを求めて，解uが実現されるということである．

これに何が含まれているかを説明するために，最も容易なDirichlet問題

$$\begin{cases} u''(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases}$$

*)　変分的方法の立場から，数値法が節2.6で論ぜられる．

†)　Poissonは球に対するDirichlet問題を解いた(1820)．Gaussは任意の領域に対して解こうとし，領域Ωにはある制限の必要なことを結論した(1839-40)．Greenは物理的な事象に従ってDirichlet問題に対する解の存在を主張したが（1828, 1833），任意領域に対するGreen関数の存在については示さなかった．Greenの証明は当時未証明であったDirichlet原理に依存していた．Thompson（Kelvin卿）(1847)，Riemann（1851)，Dirichlet（1850年代初期）は皆Dirichlet原理の正しいことを仮定して，ポテンシャル論と複素変数解析関数論の研究を進めた．その後Dirichlet原理は重大な危機に見舞われた．すなわち，Weierstrassは，問題の解として連続関数の存在しないような変分法における最小値問題の例を与えて（1870)，Dirichlet原理に疑問を投げかけ，エネルギ-積分が$C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$級の試行関数の中で一様な下界をもつけれども，“下界をもたらす連続微分可能な関数族に関数uが属するか否かは確定できない”ことを正しく主張した．Dirichlet原理は30年間評判を落とし，この間にC.Neumann(1870)，H.Schwarz(1870)，Poincaré(1887)，Picard(1888)等はDirichlet問題の存在証明を他の方法で与えた．だが一方，Hilbertは，広いクラスの領域Ωに対して境界条件および微分方程式を満たす$C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$級極限$u$をもつ最小列の存在を示すことによって，Dirichlet問題を危機から救った(1899)．これによって，すべてのこの様な領域Ωに対してDirichlet問題が解決された．

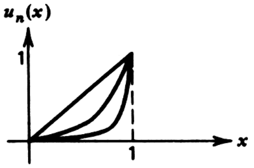


図 1.5g

を考えよう．$u(x)=x$が解である．最小関数列として先験的に$u_n(x)=x^n$，$n=1$，2，3，…と選ぶとき（図1.5g参照），$D(u_n)=n^2/(2n-1)$（$n=1$，2，3，…）．よって，この関数族のうちで最小にする試行関数はDirichlet原理の主張するように，調和関数である．

もっと一般的に，区間$0\leqq x\leqq 1$上で任意の連続微分可能な関数vを考えると，部分積分法によって，任意の$u\in C^2[0,\ 1]$に対して，

$$\begin{aligned} D(v) &= \int_0^1 (v')^2\,dx \\ &= \int_0^1 (u')^2\,dx + \int_0^1 ((v-u)')^2\,dx + 2\int_0^1 u'(v-u)'\,dx \\ &= D(u) + D(v-u) + 2\left((v-u)u'\Big|_0^1 - \int_0^1 (v-u)u''\,dx\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．最後の項は，uとvが与えられた同じ境界値をもち，かつuが調和であるとき，消えてしまい，よって，(エネルギ-) 積分$D(v-u)$の正値性から

$$D(u) \leqq D(v)$$

を得る．Dirichlet原理の困難は他の方面にある：実際に極小エネルギ-値に到達する関数uの存在を議論すること，およびそのとき，uが実際に領域Ωの到る所で調和でかつ微分方程式が完全に解けるように，その閉包$\overline{\Omega}$上で十分に正則なことを示すこと．

変分的方法は特に固有値問題では，恐らく一層重要になる．というのは，特に未解決であり*)，かつ変分的考察によって，真の固有値λ_nをそれに対する上界と下界によって近似しなければならない様な非常に重要な固有値問題が存在するからである．固有値の変分的特徴付けを証明するために，先の例（**Rayleigh問題**）を考えよう：

$$\begin{cases} -v'' = \lambda v, & 0 < x < \pi, \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

これに対する固有値は$\lambda_n=n^2$，対応する固有関数は$v_n(x)=\sin nx$（$n=1$，2，3，…）

*）　例えば，量子力学の問題，節1.7および節2.6を参照．

であった．境界上で消える，すなわち，$v(0)=v(\pi)=0$を満たす任意の実関数を$v\in C^2(0,\ \pi)\cap C^1[0,\ \pi]$ に対して，部分積分すると，

$$\int_0^\pi |v'(x)|^2\, dx = -\int_0^\pi v(x)v''(x)\, dx.$$

そして，特に固有関数に対して

$$\lambda_n = \int_0^\pi |v_n'|^2\, dx \Big/ \int_0^\pi v_n^2\, dx > 0$$

を得る．勿論，以前にODEからλ_nを正確に，そしてそれ故それらの正値性を導いたが，上の議論は正値性の事実をより早く，かつ後でわかるようにより一般的に示しており，それらはPDEの問題に対しても同様である．

上式の右辺は**Rayleigh商***⁾と呼ばれ，ここで論じたDirichlet境界値問題の解の変分的特徴付けの場合と同様，エネルギー積分$\int |v'|^2$が重要な役割を演ずる．このEVPにおいて，最小固有値†⁾λ_1の変分的特徴付けは

$$\lambda_1 = \inf_v \int_0^\pi |v'|^2\, dx \Big/ \int_0^\pi v^2\, dx, \qquad v(0) = v(\pi) = 0$$

によって与えられ，Dirichlet原理のときと同様の疑問が生ずる：下限を与えるv_1とは実際にどんなvの関数族に属するものか？　また，その様なv_1はもとのPDE固有値問題を満たす程に十分に正則であるか？

この問題の変分的特徴付けを説明するために，$v_n=\sin nx$に対して，次に注意しよう：

$$\frac{\int_0^\pi |v_n'|^2\, dx}{\int_0^\pi (v_n)^2\, dx} = \frac{n^2 \int_0^\pi \cos^2 nx\, dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx} = n^2$$

および，微積分学から（ふたたび，Wallisの公式を用いて）

$$\int_0^\pi v_n(x)v_m(x)\, dx = \begin{cases} \pi/2, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

後で精密化がなされるが，後者はv_nが **“直交”** 関数集合をなすことを意味する．

問題1．(*a*) $\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx=\pi/2$ $(n=m)$, $=0$ $(n\neq m)$；$n, m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$を証明せよ．

*）　Rayleigh卿による．彼は光，音，色，電磁気学の古典的スペクトル解析の広い分野で仕事をした（*Theory of Sound*，1877）（また，節2.8中の議論参照）．

†）　より高いλ_nも同様に特徴付けられるが，それより小さな固有関数v_1，…，v_{n-1}に“直交する”vに関してのみとられる下限を伴う．

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$ も同じ性質（しかし定数は異なる）をもつことを証明せよ．ただし，$\lambda_n(x)$ と $\varphi_n(x)$ は関数$\sin nx$ ($n=1$, 2, 3, …) と$\cos nx$ ($n=0$, 1, 2, …) をとるものとする．この様な関数集合 $\{\varphi_n(x)\}$ は，内積 $(\varphi_n, \varphi_m)=\int \varphi_n\varphi_m dx$ に関して互いに直交系であるといわれる．Fourierの定理（後で見る様に）の述べることは，任意の2乗可積分関数*) fが，互いに直交する関数を用いてかけることである．丁度，変数分離法で仮定した様に，それらはこれまで形式的に適用されていた．

問題2．関数$v\in C^1[0, \pi]$，$v(0)=v(\pi)=0$に対して，$R(v)=\int_0^\pi (v')^2dx \Big/ \int_0^\pi v^2 dx$を上の固有値問題で議論したRayleigh商とする．真の第一固有関数†) $v_1(x)=2^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\sin x$を評価するための“試行関数”として関数$v(x)=cx(\pi-x)$ (c：任意定数) を考えよう． (a) $R(v)$を計算し，これが固有値$\lambda_1=1$にどれ程近いかを見よ．

(b) cの最良値に対して，根平均2乗誤差‡) $\left(\int_0^\pi |v-v_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$を計算せよ．これは変分的試行関数の典型的な例で，それらは期待以上に良い固有値評価になっている．

問題3．次の最小化問題を考えよ．

$$\lambda = \underset{v\in C^0[0,1]}{\text{minimum}} \int_0^1 v^2\, dx,$$

$$v(0) = 0, \qquad v(1) = 1.$$

そして以前に用いた$u_n(x)=x^n$を使って，解の存在しないことを示せ．

問題1.9.5(1)において，幾つかの更に進んだ歴史的考察が述べられる：読者に対する演習問題も用意してある．例えば，興味ある疑問“Robin境界条件はどうしてそう名付けられたか？”は，結局読者にこの問題のより人間的な幾つかの側面を突きつけるものである．

問題1.9.5(2)において，幾つかの技術的な詳細を予定している：例えば，どんな領域Ωが，心配なく研究を進めることができる様に，“十分に好適”なのか？ 実用上，殆んどの領域ではDirichlet問題の連続な解の存在，本節で論じた様なGreen関数の構成，次節で議論される様な部分積分法や発散定理の使用についての許容性，等々

*) すなわち，有限の“長さ” $(f, f)^{\frac{1}{2}}=\left(\int f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$をもつ関数．

†) ここでは，1 に等しい“長さ”をもつ様に正規化されている．

‡) すなわち，ここで述べた意味でvとv_1の間の“距離”である．**“距離関数”**，**“ノルム”**とも呼ばれ，以下しばしば用いられる．

に関する限り，何ら問題は生じない．たとえ数学的に興味があっても，かなり病的な“好適でない領域”Ωには深入りしたくない．他方，それについてより深く学びたいとする意欲的な読者を失望させることもしたくない．

問題1.9.5(3)において，問題の変分的定式化がその問題に対応する（Eulerの）偏微分方程式と関係づけられる．次節で説明される発散定理や偏微分方程式に対する部分積分法のGreenの等式を用いて，それを行う．

1.5(3)　演習問題

1．(*a*)　区間（a，b）に対して1次元Dirichlet原理をかき下ろせ．

(*b*)　汎関数$\int_a^b |v'(x)|^2 dx$が考えられるすべてのvについて，有限な下限をもつことを証明せよ．

(*c*)　本文での下限と最小の違いは何であるか？

2．(*a*)　微分方程式の定式化から変分的定式化への道筋をたどるとき，その出発のために役立つ良いヒントを考えよ．

(*b*)　1次元Dirichlet問題に対して，前問（a）を試みよ．

(*c*)　変分的定式化において，vの“変分”はどこにあるか？

3．正則性の疑問が，微分方程式の変分的定式化を理解しようとするとき，主要なものになる理由を三つ与えよ．

休止　第1回：例題，説明，演習*)

基本概念の多くは，これまでに導入されている．例題や演習問題を追加して，その主要な点の幾つかを補強するために，小休止するのはよい場所であろう．

ここでは，都合のよい係数（例えば，1に等しい）をもち，都合のよい区間（例えば，(0, 1) とか (0, π)）の上の方程式について考えることにする．より一般の場合を扱うにしても，困難は生じないだろう．

例題

kとlを物理定数として，次の方程式を解け．

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$

解答． $u(x,\ t) = X(x)\,T(t)$と仮定して，変数を分離する．方程式に代入すると，

*)　本書には六個の休止が挿入され，活用したり理解する上で役立ち，かつ望むらくは興味ある補助的な題材としても利用できるだろう．しかし，拘泥し過ぎる様なことをしてはいけないから，同時に軽く触れる程度で通り過ぎるよう忠告する．

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

を得る．ここで$-\lambda$は今のところ任意の定数である．負号は単に便宜上つけたもので，この式における二つの関数が変数xとtに独立なために，定数でなければならない．普通，初めに空間的ODEが選ばれる．何故なら，その固有値がその後導かれる変数分離解で，より基本的なものとなるからである．また境界条件を，解に対するこの選定に取り込ませることは自然なことである．その結果導かれるODEの境界-固有値問題は

$$\begin{cases} -kX''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

で，これは無限個の解をもつ，すなわち，固有関数は$X_n = c_n \sin\ (n\pi x/l)$で，対応する固有値は$\lambda_n = kn^2\pi^2/l^2 (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$である．こうして決められた値$\lambda_n$によって，時間因子は$T_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$と定められ，これと対応する$X_n$因子を結びつけて，直ちに次の形の解を得る．

$$u_n(x,\ t) = c_n X_n(x) T_n(t) = c_n \sin\ (n\pi x/l) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{l^2}t}.$$

ここで，任意定数d_nは任意定数c_nの中に吸収させたことに注意せよ．線形の重ね合わせを作り，極限移行すると，形式的変数分離解$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,\ t)$が得られる．これは境界上で消え，偏微分方程式を（形式的に）満たす．さらに，c_nをxのFourier正弦係数にとると，（形式的な）初期データxに等しいだろう；すなわち，

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{l}\int_0^l x \sin \frac{n\pi}{l} x\, dx \\ &= \frac{2}{l}\left[\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l} - \frac{xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^l \\ &= \frac{2}{l}\left[-\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi\right] = (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}. \end{aligned}$$

よって，解は次のようにかかれる：

$$u(x,\ t) = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{kn^2\pi^2}{l^2}t}$$

この解の固有関数，逓減率，Fourier係数には，物理学的スケールが反映されていることを注意しておく．

演習問題

1. この例題で，$u(x,\ 0)=A$（固定された定数）とおいて，解け．

2. 例題(1)を次の様に変更せよ．

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = u, & 0 < x < 10, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(10, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = a, & 0 < x < 5, \\ u(x, 0) = -a, & 5 < x < 10. \end{cases}$$

ヒント：この方程式は0階の項をもつ．それを消すために，$u(x,\ t)=e^t v(x,\ t)$とおいて，代入せよ．

3. ラプラシアンを3次元の球座標系で表わし，変数分離法の議論を行え(導かれたODEは解がなくてもよい)．

4. 中心部を引張った弦の振動問題を変数分離法によって解け．

$$\begin{cases} u_{tt} - k^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 2Ax/l, & 0 \leqq x \leqq l/2, \\ u(x, 0) = 2A(1 - x/l), & l/2 \leqq x \leqq l, \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < l. \end{cases}$$

5. 次の非同次問題を変数分離法によって解け．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \psi(x), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geqq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$\psi(x)$として，x，$-e^{-x}$，また他の容易に（Fourier）積分され得る強制関数を選んで，さらに$f(x)$に対しても同様にいろいろと選んで，考えよ．

ヒント

$$u(x, t) = v(x, t) + g(x).$$

偏微分方程式に対するGreen関数はそれを求めるには厄介であるけれども，常微分方程式のそれは定数変化の手法で求められる．

例題

次に対するGreen関数を見出せ．

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

ここで，パラメータλは任意の実数である．

解答． 先ず，同次方程式を解く．次の三つの場合が考えられる．

$\lambda > 0$に対し，

$$u_H(x) = c_1 \cos \lambda^{1/2} x + c_2 \sin \lambda^{1/2} x.$$

特解を求めるために，

$$u_P(x) = c_1(x) \cos \lambda^{1/2} x + c_2(x) \sin \lambda^{1/2} x$$

とおくと，定数変化の方程式

$$c_1' \cos \lambda^{1/2} x + c_2' \sin \lambda^{1/2} x = 0$$

$$c_1' \sin \lambda^{1/2} x - c_2' \cos \lambda^{1/2} x = -f(x)/\lambda^{1/2}$$

が得られ，これから，

$$c_1'(x) = -f(x) \sin \lambda^{1/2} x / \lambda^{1/2}$$

$$c_2'(x) = f(x) \cos \lambda^{1/2} x / \lambda^{1/2}.$$

よって，

$$u_P(x) = \left(-\lambda^{-1/2} \int_0^x f(s) \sin \lambda^{1/2} s \, ds\right) \cos \lambda^{1/2} x + \left(\lambda^{-1/2} \int_0^x f(s) \cos \lambda^{1/2} s \, ds\right) \sin \lambda^{1/2} x.$$

一般解は$u(x) = u_H(x) + u_P(x)$であり，境界条件を満たすために，

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = c_1 \\ 0 &= u(l) \\ &= c_2 \sin \lambda^{1/2} l \\ &\quad - \lambda^{-1/2} \cos \lambda^{1/2} l \int_0^l f(s) \sin \lambda^{1/2} s \, ds \\ &\quad + \lambda^{-1/2} \sin \lambda^{1/2} l \int_0^l f(s) \cos \lambda^{1/2} s \, ds \end{aligned}$$

であり，

$$c_2 = -\frac{1}{\lambda^{1/2} \sin \lambda^{1/2} l} \int_0^l \sin \lambda^{1/2}(l - s) f(s) \, ds$$

と定められる．よって，任意の強制データに対する一般解は次の様にかかれる．

$$u(x) = \sin\lambda^{1/2}x\int_0^l \frac{\sin\lambda^{1/2}(l-s)}{-\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}l}f(s)\,ds + \int_0^x \frac{\sin\lambda^{1/2}(x-s)}{\lambda^{1/2}}f(s)\,ds$$

$$= \int_0^x \left[\frac{\sin\lambda^{1/2}x\sin\lambda^{1/2}(s-l)}{\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}l} + \frac{\sin\lambda^{1/2}(x-s)}{\lambda^{1/2}}\right]f(s)\,ds$$

$$+ \int_x^l \frac{\sin\lambda^{1/2}x\sin\lambda^{1/2}(s-l)}{\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}l}f(s)\,ds.$$

角括弧内を通分すると，

$$[\cdots] = \frac{\sin\lambda^{1/2}s\sin\lambda^{1/2}(x-l)}{\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}l}.$$

結局，

$$u(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)\,ds.$$

ただし，

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin\lambda^{1/2}s\sin\lambda^{1/2}(x-l)}{\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}l}, & 0 \leqq s \leqq x, \\[2ex] \dfrac{\sin\lambda^{1/2}x\sin\lambda^{1/2}(s-l)}{\lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}l}, & x \leqq s \leqq l \end{cases}$$

とかかれる．Green関数は，丁度この問題の固有値$\lambda_n = n^2\pi^2/l^2$で特異となることに注意する．より進んだ理論（**積分方程式論**または**Fredholm理論**と呼ばれている）では，これらの特異点でのGreen関数が研究される．データfが固有関数に直交するとき，やはり解はしばしば既約Green関数によって表現される．

空間領域の次元が増す（すなわち，常微分方程式から偏微分方程式へ移行する）に従って，Green関数の特異性は前に述べた性質を再生するデルタ関数の適応を一層必要とする．2次元と3次元の空間における特異性は，次節のGreen等式を用いて，最もよく理解される．

演習問題

6. この例題に対して，次を示せ．

$\lambda=0$のとき

$$G(x,s) = \begin{cases} s(x-l)/l, & 0 \leqq s \leqq x, \\ x(s-l)/l, & x \leqq s \leqq l, \end{cases}$$

$\lambda<0$のとき

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh((-\lambda)^{1/2}s)\sinh((-\lambda)^{1/2}(l-x))}{(-\lambda)^{1/2}\sinh((-\lambda)^{1/2}l)}, & 0 \leqq s \leqq x, \\ \dfrac{\sinh((-\lambda)^{1/2}x)\sinh((-\lambda)^{1/2}(l-s))}{(-\lambda)^{1/2}\sinh((-\lambda)^{1/2}l)}, & x \leqq s \leqq l. \end{cases}$$

7.次の境界値問題に対するGreen関数を見出せ．

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x), & 0 < x < \pi/2, \\ u(0) = u(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

次に，$f(x)=x$のときの解を見出せ．

8.次の境界値問題に対するGreen関数を見出せ．

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x), & 0 < x < \pi/2, \\ u(0) + u'(0) = 0, \\ u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

次に，$f(x)=x$のときの解を見出せ．

変数分離法と**Green関数表現**のあとで，偏微分方程式を解くための第三の主だった方法を**変分的方法**として類別した．これは古典的な立場である．現代的な観点では，**数値法**がそれに代って強調されるだろう．妥協として，第2章節2.6で，それら両者を統一的なやり方で折合わせた．この点で，数値的テクニックの本質の幾つかを学びたい読者は，第3章付録Bを見られたい．

与えられた偏微分方程式の変分的定式化は単に全体にuを乗じ，それを部分積分しても得られる．これによって，次節のGreenの等式に到る．幾つかの重要な考え方は1次元空間で説明され得る．

例題

両端噛み締め（弾性）棒の問題

$$\begin{cases} -u'''' = \Lambda u'', & a < x < b, \\ u(a) = u(b) = 0, \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

の第一固有値Λ_1は，同一区間上の両端固定弦の問題

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, & a < x < b, \\ w(a) = w(b) = 0 \end{cases}$$

の第二固有値λ_2に等しいかあるいはより大きいことを，変分的に示せ．

解答　勿論，このODEの立場*)で，この問題をすべての固有値と固有関数に対して，

*)　PDEの立場では**A.Weinsteinの予想**があり，一般に真であることは次で示された．L. Payne, Inequalities for eigenvalues of membrances and plates, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1955), 519-529. また，休止第2回をも参照．

厳密に解くことができる．ここでは変分的に進めるために，任意の2回連続可微分関数uとvに対する重要な部分積分法の公式

$$(uv' - vu')\Big|_a^b = \int_a^b (uv'' - vu'')\,dx$$

を思い出そう．$v=u''$とおくと，噛み締め棒の境界条件を満たす全てのuに対して，

$$0 = \int_a^b uu'''' \,dx - \int_a^b (u'')^2\,dx$$

が成り立つ．棒の固有値方程式にuを乗じ，積分し，上の関係式に代入すると，任意の固有関数uに対して

$$\int_a^b (u'')^2\,dx = -\Lambda \int_a^b uu''\,dx = \Lambda \int_a^b (u')^2\,dx$$

を得る．よって，この棒の固有値Λ_nは次のRayleigh商によって与えられる．

$$\Lambda_n = \underset{\text{噛み締め棒}}{R(u_n)} \equiv \int_a^b (u_n''(x))^2\,dx \Big/ \int_a^b (u_n'(x))^2\,dx .$$

更に，節1.5.3のDirichlet原理の場合と同様，これらは次式で変分的に特徴づけられる．

$$\Lambda_n = \underbrace{\inf R(u)}_{\substack{\text{すべての}u\text{が}u_1,\ \cdots,\ u_{n-1}\text{に直交} \\ u(a)\,=\,u(b)\,=\,u'(a)\,=\,u'(b)\,=\,0}}$$

ここで，uがvに直交する$(u\perp v)$とは$\int_a^b uv dx=0$となることである．特に，Λ_1は許され得るu(例えば，与えられた境界条件を満たし，部分積分の可能なだけ十分な導関数をもつ）の全体についてのRayleigh商の下限である．Rayleighの固定弦の問題に対して，既に知られているように，その固有値の変分的特徴付けは同様にして次式で与えられる．

$$\lambda_n = \underset{\text{固定弦}}{R(w_n)} = \underbrace{\inf \int_a^b (w')^2\,dx \Big/ \int_a^b w^2\,dx}_{\substack{\text{すべての}u\text{が}u_1,\ \cdots,\ u_{n-1}\text{に直交} \\ w(a)\,=\,w(b)\,=\,0}}.$$

さてu_1を棒問題の第一固有関数とするとき，u_1'は弦問題の境界条件を満たすことがわかる．それが第一弦固有関数w_1に直交しなければならないから，

$$\Lambda_1 = \int_a^b (u_1'')^2 \Big/ \int_a^b (u_1')^2 \geqq \lambda_2$$

なる要請されていた結果が成り立つはずである．$\int_a^b u_1' w_1 \neq 0$を仮定して，上の試行関数u_1'を修正して，新しい試行関数

$$v = \alpha u_1' + u_1$$

を作る．

$\alpha = -\int_a^b u_1 w_1 / \int_a^b u_1' w_1$ に選ぶと，

$$0 = \int v w_1 = \alpha \int u_1' w_1 + \int u_1 w_1 .$$

この試行関数によって，次の不程式が得られる．

$$\lambda_2 \leqq \frac{D(v)}{\int_a^b v^2} = \frac{\alpha^2 \int_a^b (u_1'')^2 + \int_a^b (u_1')^2}{\alpha^2 \int_a^b (u_1')^2 + \int_a^b u_1^2} = \frac{\alpha^2 \Lambda_1 + 1}{\alpha^2 + \left(\int_a^b u_1^2 \Big/ \int_a^b (u_1')^2\right)} \leqq \Lambda_1 .$$

境界条件によって，

$$\int_a^b u_1'' u_1' = \frac{1}{2} \int_a^b ((u_1')^2)' = 0,$$

$$\int_a^b u_1' u_1 = \frac{1}{2} \int_a^b (u_1^2)' = 0$$

であるから，混合項は消える．最後の不等式で，

$$\int_a^b (u_1')^2 / \int_a^b u_1^2 \leqq \Lambda_1 \equiv \int_a^b (u_1'')^2 / \int_a^b (u_1')^2$$

が用いられた．これは部分積分法と次節のSchwarz不等式

$$\int_a^b (u_1')^2 = -\int_a^b u_1 u_1'' \leqq \left(\int_a^b (u_1)^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b (u_1'')^2\right)^{1/2}$$

から得られる．

演習問題

9．(*a*)　両端嚙み締め棒の問題と両端固定弦の問題を厳密に解け．(*b*)　棒の固有関数が直交することを確かめよ．(*c*)　区間（*a*, *b*）の長さが増すに従って，両方の問題とも，そのすべての固有値は減少することを変分的に示せ．

1.6　三つの重要な数学的道具

通常用いられる数学的道具の中で，その準備としてこの章では最も重要なものを三つ選ぶと，次を挙げることができる．

(1)　**発散定理**

(2)　**不等式**

(3)　**収束定理**

これらを特別視すると，その代りに次のものでおきかえられよう．

(1′)　**Greenの等式**

(2′)　**Schwarzの不等式**

(3′)　**項別微分法**

または，極端に一般化してしまうと，次の三つが注目される．

(1″)　**外微分形式**

(2″)　**アプリオリ評価**

(3″)　**高等微積分学**

と分類できるにちがいない．

ここでは幾つかの基本事項だけについて考えよう*)．もっと一般的な理論は三番目の三つ組を主題とする参考書を参照されたい．

1.6.1　発散定理

発散定理†)は微積分学の基本定理の高次元形式であって，それはむしろ簡単に次の様に述べられる．

$$\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\oint_{\partial\Omega}fn_i\ .$$

ここで，n_iは表面$\partial\Omega$の単位外向き法線の第i成分である（図1.6a；**n**は単位外向き法ベクトル）．

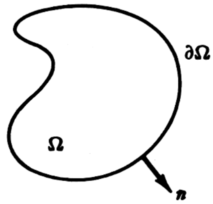


図1.6a

この重要な定理は幾つかの形式でかかれる．微積分学の基本定理と同様，一般的な仮定として，左辺の関数fはC^1級であるとする．後で，正則性の仮定が一層詳しく，特に領域Ωとその境界∂Ωに関わるときに議論される．当面はそれとなく，外向き法偏微係数$\partial u/\partial n\equiv \mathrm{grad}\,u\cdot\mathbf{n}$がうまく定義されているとだけを仮定しておく．今

*)　これら三つの道具を扱える様にここで費すわずかな時間は，あとで有用になるだろう．高等微積分学を習得した読者は恐らく，発散定理に（十分とはいえなくても）出会っている．また不等式には十分でないこと殆んど確かであるし，一様ノルムにおける収束定理の応用に到っては殆んどお目に掛かっていないだろう．一方，先へ早く進みたい読者に対しては，微積分学からの事柄(1)　部分積分法，(2)　Schwarzの不等式，(3)　多くの好適な事柄が収束すること，をよく心得て先へ進んでよい．

†)　これはまた，**Gaussの積分定理**，ときには**Greenの定理**とも呼ばれる．後者は以下に説明される様に，通常は特殊な2次元形式で与えられる．

に判明することであるが，高次元の面積分に何ら寄与しないので，表面の端やかどは無視してもよいだろう．

発散定理：

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} = \oint_{\partial\Omega} f n_i$$ **成分形式**（最も一般的）

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$ 微積分学の **"1次元" 形式**

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{f} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}$$ **ベクトル形式**

$$\int_\Omega (f_i)_{,i} = \oint_{\partial\Omega} f_i n_i$$ **総和規約形式**

$$\iint_\Omega [Q_x - P_y]\,dx\,dy = \oint_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy$$ **"Greenの定理" 形式**／**"Stokesの定理" 形式**

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \oint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - \int_\Omega u\Delta v$$ **Greenの第一等式**

$$\oint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - \oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Omega u\Delta v - \int_\Omega v\Delta u$$ **Greenの第二等式**

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{1}{r_{PQ}}\Delta_Q u + \frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial\Omega} \frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n_Q} - \frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)$$ **Greenの第三等式**（3次元の場合）

発散定理の証明は全く込み入っており，そのより完全な議論は参考書にゆずる*)．ここでは，"単純な" 領域Ωあるいは有限個の単純な部分に分割可能な領域Ωだけを

*) 最良の一般的な参考書は恐らく，O.D.Kellog, *Foundations of Potential Theory* (Dover, New York,1953)．ただし，正則領域に対する証明は多くのテキストに散見する．Ωとしてもっぱら立方体を選んだ現代的証明は，M.Spivak, *Calculus on Manifolds* (*Benjamin, New York*, 1965)［訳者注：藤原正彦訳，多変数解析学，東京図書 (1972)］．あるいは，H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963)［訳者注：岩堀長慶訳，微分形式の理論，岩波書店 (1967)］．積分論の観点に立つ最も一般的な条件としては，Hassler Whittney, *Geometric Integration Theory* (Princeton U.P.,Princeton, N.J.,1957)．

考える．それによって，発散定理の証明が，事実上，微積分学の基本定理へ帰着されることがわかるだろう．ここで，単純な領域とは，互いに交らないC^1級曲面の頂面と底面をもち，1座標軸方向に柱状にとられたものとする．図1.6bはその一例である．立方体は単純な領域であり，与えられた大きな領域はしばしば図に示される様に，立方体格子と単純な領域の残りに分解される．図1.6bのz軸に最も近い小領域は，単純領域ではないが，その場合でもそのことが同じく証明される；それが更に，二つの単純な部分領域へ分割され得るからである．発散定理が単純な領域に成り立つと仮定すると，関数fが連続ならば，立方体上の相対する面での積分は打ち消し合って，寄与するのは領域の境界に沿う単純領域からのものだけとなる．

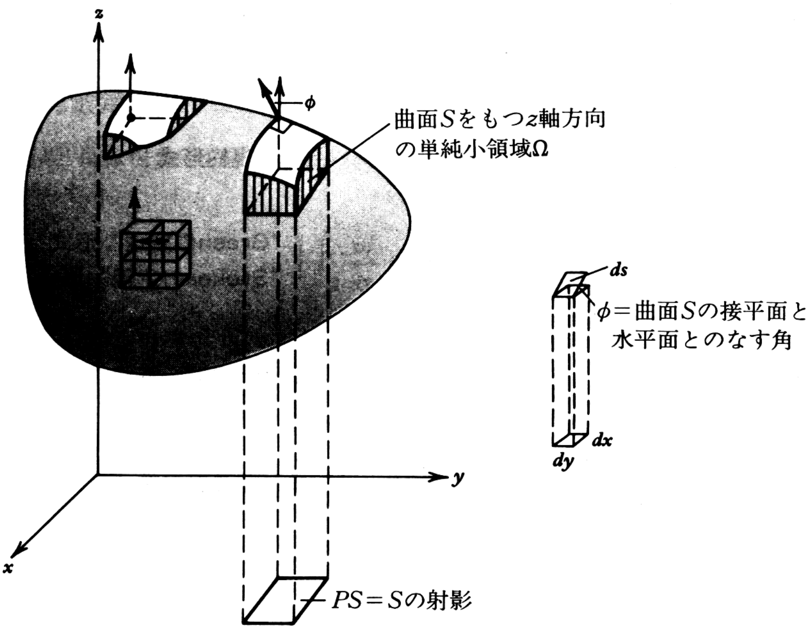


図1.6b

図に示された単純な領域Ωを眺めよう．それは頂に曲面Sとxy平面に平行な底面をもち，他の面は柱面をなす．与えられた関数fがこの部分領域とその境界の全部でC^1級であると仮定すると，微積分学の基本定理と逐次積分法の定義によって，

$$\int_\Omega f_z \equiv \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}\,dV = \iint_{PS} dx\,dy \int_{\text{“底面”}}^{\text{“頂面”}} \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

$$= \iint_{PS} [f(x,\ y,\ \text{頂面の}z) - f(x,\ y,\ \text{底面の}z)]\,dx\,dy\,.$$

体積積分を計算してから，柱体の側面で$n_z=0$，底面で$n_z=-1$に注目して，次の面積分が得られる．

$$\oint_{\partial\Omega} fn_z \equiv \oiint_S f\cos\varphi\, ds - \oiint_{PS} f(x,\ y,\ \text{底面の}z)\, dx\, dy.$$

φは表面S上の任意の点での水平面と無限小接平面（図1.6b参照）の間の角*)であるから，

$$\iint_S f\cos\varphi\, ds = \iint_{PS} f(x,\ y,\ \text{頂面の}z)\, dx\, dy$$

となり，定理は証明された．

発散定理のベクトル形式を見ると，成分項について和をとり，今示したばかりの成分形式を使いさえすればよいことがわかる．すなわち，有限和の積分†)は積分の有限和であるから，$\mathbf{f}=(f_1,\ \cdots,\ f_n)$のとき，

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dV = \sum_{i=1}^n \oint_{\partial\Omega} f_i n_i\, ds = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, ds.$$

総和規約形式も同様に示される．

発散定理のGreen定理形式を次に考えよう．前にも触れた様に，これは“Stokes定理形式”ともみられるが，後者は通常3次元で述べられており‡)，そこでの証明は（高次元を含めて）Green定理形式と同様になされる．Ωを2次元領域とし，その境界，$\partial\Omega$を$x=x(s)$，$y=y(s)$で表す．ここで，sは弧の長さ（図1.6c）．$\mathbf{f}$を

*)　微積分学から，曲面$u(x,\ y)$に対するその面積$A(s)$が次式で与えられることを思い出すことは有用である．

$$A(S) = \iint_{PS} (1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}\, dx\, dy.$$

すなわち，この面上の1点での接平面は$z-z_i=u_x(x-x_i)+u_y(y-y_i)$で与えられ，その方向余弦は$(u_x,\ u_y,-1)$である．一方，$xy$平面の方向余弦は$(0,\ 0,\ -1)$．よって，$\cos\varphi=(0,\ 0,\ -1)\cdot(u_x, u_y, -1)/1\cdot(1+u_x{}^2+u_y{}^2)^{1/2}$．そして積分を定義するときの通常の極限操作によって，

$$A(S) = \lim\sum\Delta S = \lim\sum dx_i\, dy_i/\cos\varphi_i \iint_{PS} (1+u_x^2+u_y^2)^{1/2}\, dx\, dy.$$

発散定理を証明したときの論法はこれと本質的に同じである．

†)　これは線形作用素である．

‡)　$\oiint_S [(R_y-Q_z)\cos\alpha + (P_z-R_x)\cos\beta + (Q_x-P_y)\cos\gamma]\, dS = \oint_{\partial S}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$

$$\mathbf{f}(x, y) \equiv (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (Q(x, y), -P(x, y))$$

なるベクトル関数とする．このとき，

$$\iint_\Omega [Q_x - P_y]\, dx\, dy = \iint_\Omega ((f_1)_x + (f_2)_y) = \iint_\Omega \operatorname{div} f\, dV = \oint_{\partial\Omega} f_i n_i\, ds$$
$$= \oint_{\partial\Omega} \left(f_1 \frac{dy}{ds} - f_2 \frac{dx}{ds} \right) ds = \oint_{\partial\Omega} Q\, dy + P\, dx.$$

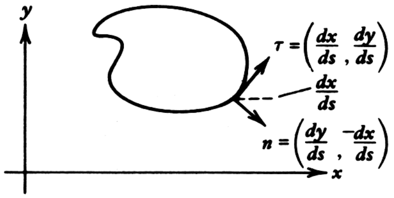


図 1.6c

さて，Greenの三つの等式に移ろう．これらはPDEの研究ではよく用いられる．初めの二つはまさに部分積分法として（例えば，微積分学の基本定理を発散定理でおきかえた部分積分法の高次元表現として）解釈される．実際，その鍵は**部分微分法***)，すなわち，積の微分公式

$$(uv_{,i})_{,i} = uv_{,ii} + u_{,i}v_{,i}$$

であり，これをΩ上で積分すると，

$$\int_\Omega (uv_{,i})_{,i}\, dV = \int_\Omega u\, \Delta v\, dV + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dV.$$

発散定理を適用して

*)　1次元では，これは初等微分公式 $(uv)' = uv' + vu'$ であり，同様に与えられた総和規約の公式は対応する偏導関数だけを加える．$n=2$ と $n=3$ の場合をかき下ろすと，それぞれ次の様になる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(u \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)$$
$$= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}\right).$$

$$\int_\Omega (uv_{,i})_{,i}\, dV = \oint_{\partial\Omega} uv_{,i} n_i\, ds \equiv \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds\,.$$

よって，第一等式

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_\Omega u\, \Delta v$$

を得る．uとvは微分したり積分したりするために$C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$にあると仮定した．Greenの第一等式の特殊な場合として，$u=v$とおくと，

$$\int_\Omega |\mathrm{grad}\, u|^2 = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} - \int_\Omega u\, \Delta u\,.$$

ここで，Dirichlet積分$\int_\Omega |\mathrm{grad} u|^2$はエネルギ-，仮想質量，容量，捩れ剛性などの重要な物理量を表す．

変分的方法を論じたとき考えたODEの場合と同様，$D(u,\ v) = \int \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v$とおいて，$n$次元空間のベクトルに対する通常の内積の対称性により

$$D(u,\ v) = D(v,\ u)$$

に注意すると，次のGreen第二等式を得る．

$$\oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Omega u\, \Delta v - \int_\Omega v\, \Delta u.$$

Green第三等式は，Green第二等式でvを$v_{PQ} = S(P,\ Q) = (4\pi r_{PQ})^{-1}$とおいて得られることがわかる．ここで，$S(P,\ Q)$ は節1.5.2で論ぜられた特異な熱源関数で，Ωの内点Pで次のデルタ関数の性質をもつ：

$$\int_\Omega u\, \Delta v \equiv \int_\Omega u(Q)\, \Delta_Q v_{PQ} = -u(P).$$

この式の判定は原理的に，Green第二等式における被積分関数にある特異な項v_{PQ}によって，その積分を特異（あるいは広義）積分として考えざるを得ないという見方を含むものである．例えば微積分学によって，上の積分の意味は，極限の存在を仮定して*)，

*）　勿論この場合，Ω_ϵで$1/r_{PQ}$が調和であるから，

$$\int_{\Omega_\epsilon} u\, \Delta_Q \left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\right) = 0\,.$$

よって極限は存在する．

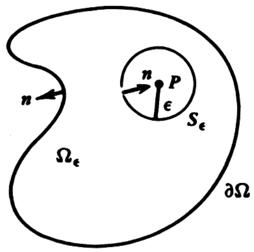


図 1.6d

$$\int_{\Omega} u\, \Delta_Q \left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\right) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u\, \Delta_Q \left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\right)$$

ということである(図1.6d参照).

このとき，もともとの領域Ωの内点Pと，そのPを中心とした小さな3次元ボールB_εをもつ図1.6dで示された領域Ω_εを考える．したがって，$\partial\Omega_\varepsilon$は互いに交らない部分$\partial\Omega$と$S_\varepsilon\equiv\partial B_\varepsilon$から成る．この$\Omega_\varepsilon$に対して，Green第二等式を適用すると，次を得る．

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\varepsilon} u\, \Delta_Q \frac{1}{4\pi r_{PQ}} \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} v_{PQ}\, \Delta_Q u - \oint_{\partial\Omega} v_{PQ} \frac{\partial u}{\partial n_Q} + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v_{PQ}}{\partial n_Q} + \oint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial v_{PQ}}{\partial n_Q} - \oint_{S_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial n_Q} . \end{aligned}$$

ここで，

$$v = \frac{1}{4\pi r_{PQ}}, \quad \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\bigg|_{S_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\bigg|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} .$$

Green第三等式は，このとき，上の第二等式で両辺の極限($\varepsilon\to 0$)をとればわかる．ただし，右辺第1項が意味をもち，かつ右辺の後の二項が寄与$u(P)$ をもたらすと仮定した．3次元で体積要素はωを立体角として

$$dV = r^2\, dr d\omega$$

の形式をもつから，一番目の積分

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\right) \Delta_Q u$$

は，$u\in C^2(\Omega)$に対して正則でかつ収束する．終りから二番目の積分は連続関数uに，通常の積分に対する平均値の定理を用いて，$u(P)$に収束することがわかる．すなわち，

$$\oint_{S_\varepsilon} u(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{4\pi r_{PQ}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oint_{S_\varepsilon} u(Q)\,ds_Q = \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2}u(Q_\varepsilon) = u(Q_\varepsilon) \to u(P).$$

ここで，Q_ϵはS_ϵ上に保証されてはいるが特別視されない点である；$u \in C^0(\Omega)$によって，$\varepsilon \to 0$のとき，$Q_\epsilon \to P$および$u(Q_\epsilon) \to u(P)$が必然的に成り立つ．右辺最後の積分は，同様に$u \in C^1(\Omega)$ に対し，Pに収束するS_ϵ上の点Q'_ϵの存在することから，$\varepsilon \to 0$のとき0に収束する．なぜなら

$$\oint_{S_\varepsilon} \frac{1}{4\pi r_{PQ}}\frac{\partial u}{\partial n_Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_{S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_Q} = \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_Q}(Q'_\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n_Q}(Q'_\varepsilon) \to 0.$$

小節1.6.1を終える前に，発散定理とGreenの等式に関して三つの補足的注意を与えたい．

注意1

3次元の場合に現われた定数4πは，一般にn次元単位球の面積$\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(n/2)$でおきかえられる．また，熱源関数$V_{PQ} \equiv S_{PQ}$は次でおきかえられる：

$$S(P, Q) = \frac{1}{(n-2)\omega_n r_{PQ}^{n-2}}, \qquad n > 2,$$

$$S(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right), \qquad n = 2.$$

よって，特に，2次元のGreen第三等式は

$$u(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \ln\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\Delta u + \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega}\ln\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\frac{\partial u}{\partial n_Q}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial n_Q}\ln\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right).$$

注意2

Green第三等式の基本特異関数$S(P, Q)$をGreen関数

$$G(P, Q) = S(P, Q) + g(P, Q)$$

でおきかえると，興味ある結果が得られる．ここで$g(P, Q)$は，各固定点Pに対して，$G(P, Q)$が与えられた問題の境界条件を満たすように（これは前に節1.5でも議論された），基本特異関数に対して右辺の量を増減する滑らかな調整関数である．例えば，Dirichlet問題に対しては，$g(P, Q)$は次を満たす様要求される（図1.6 e）．

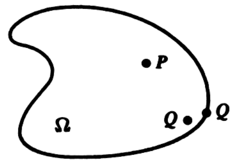


図 1.6e

$$\begin{cases} \Delta_Q g(P, Q) = 0, & Q \in \Omega, \\ g(P, Q) = -S(P, Q), & Q \in \partial\Omega. \end{cases}$$

この境界値$-S(P, Q)$が$\partial\Omega$上で連続であるから，Dirichlet問題の標準的な存在理論によって，各点Pに対して調和な解$g_P \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$が保証される[*]．その結果得られたGreen関数$G(P, Q)$をGreen第三等式に代入すると[†]，次を得る．

$$u(P) = \int_\Omega G(P, Q)F(Q) - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_Q}(P, Q)f(Q).$$

これは一般領域[‡]に対する一般Dirichlet-Poisson問題；

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta u = F, \\ \partial\Omega\text{上} \quad u = f \end{cases}$$

の解の表現公式である．例えば，二つの成分をもつ線形作用素方程式とみなされるPoisson問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta u = F, \\ \partial\Omega\text{上} \quad u = 0, \end{cases} \qquad \text{すなわち，} \quad \begin{pmatrix} \Omega \\ \partial\Omega \end{pmatrix}\text{上}\ Lu = \begin{pmatrix} -\Delta \\ I \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して，上記の表現公式はまさに逆作用素L^{-1}に対する表現

$$u = L^{-1}\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \int_\Omega G(P, Q)F(Q)\, dV_Q$$

である．合成Dirichlet-Poisson問題に対しても，同様な手続きがとられる．微分作用素の逆が初等微積分学の場合と同様，積分作用素であるべきだというのは直観的にうなずける．よってGreen第三等式をL^{-1}と解釈することによって，積分作用素の概

*)　例えば，本節の前に引用したKellogの書を見よ．

†)　これを確かめるには次の二つがある．一つは$S(P, Q)$を$S(P, Q)+g(P, Q)$でおきかえて，Green第二等式から第三等式へ変形させた議論を繰返すことであり，他は，$g(P, Q)$にGreen第二等式を用い，そして先の結果をこれらの項に加えることである．

‡)　通常，最も一般的な領域を定義していない．或る研究者達は，正則領域を発散定理の成り立つ領域であると定義することによって，これを避けているが，せいぜいまがい物でしかない．問題1.9.5を見よ．

念には多くの枝わかれや結果があるけれども，次の着想の輪を完結する：

$$\begin{array}{ccccc} \text{微積分学の基本定理} & \Longrightarrow & \text{発散定理} & \Longrightarrow & \text{Green等式} \\ \Uparrow & & & & \Downarrow \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-1}\text{としての}\int & \Longleftarrow & \begin{array}{c}\text{逆微分作用素に対}\\\text{応する積分作用素}\end{array} & \Longleftarrow & \Delta^{-1}_{D.B.C}\text{としての}\int_\Omega G\,(P,\ Q). \end{array}$$

注意3

上記の結果の系の一つは，$n \geqq 2$に対する**調和関数の平均値の定理**

$$u(P) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{r_{PQ}=r} u(Q)\, ds_Q$$

で，これは調和関数が到る所でそれ自身の球面平均に等しいことを述べている．実際，この性質は調和関数の定義的性質としてとられ，また$\Delta u=0$なる条件とも同値であることも示される．同様な**“体積平均値*)の定理”**が調和関数uに対して成り立つ．すなわち，

$$u(P) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{r_{PQ}\leqq r} u\,(Q)\, dV_Q.$$

上の平均値定理がGreen第三等式からどの様に導かれるかを見るためには，単位球に対するGreen関数$G\,(P,\ Q)$が必要である．$n=3$の場合，$G\,(P,\ Q)$は

$$G(P,\, Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \frac{1}{4\pi r_{OQ} r_{PQ'}}$$

で与えられる†)．ここで，$Q'=r_{OQ}^{-2}Q$（図1.6f参照）．対称性と三角法によって，

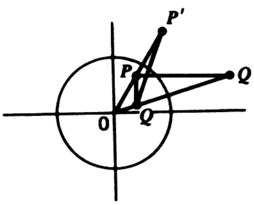


図 1.6f

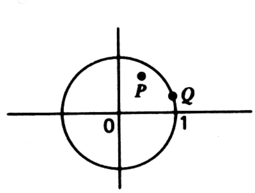


図 1.6g

*)　これは，単位ボールの体積がω_n/nであることに注目すると，平均値の定理である．

†)　これは直接確かめられる．それを導く一つのやり方は，像点P'とQ'を用いた静電気の像の“物理学的な”方法で，本質的にはここで進めたのと同じである．境界上の各点Qに対し，“釣合わせている”点源はP'にあり，よってポテンシャル$1/4\pi r_{PQ}$と$1/4\pi r_{OP'}$の比は一定でr_{OP}である．

$$G(Q,P)=G(P,Q)=\frac{1}{4\pi r_{PQ}}-\frac{1}{4\pi r_{OP}r_{QP'}}.$$

Pを固定したまま，$G(Q,P)$をQに関して微分すると，

$$\frac{\partial G}{\partial n_Q}=\left(\frac{-1}{4\pi r_{PQ}^2}+\frac{1}{4\pi r_{QP'}^2}\right)\frac{1}{r_{PQ}}.$$

ここで，Pは内点，Qは境界点とする．
相似三角形によって，$r_{QP'}=r_{QP}/r_{OP}$が成り立ち，よって，注意2の表現公式から単位球（図1.6g）に対するDirichlet問題

$$\begin{cases}\Delta u=0, & r<1,\\ u=f, & r=1\end{cases}$$

に対して，次を得る．

$$u(P)=-\oint_{r=1}\frac{\partial G}{\partial n}f\,ds=\frac{1}{4\pi}\oint_{r_{OQ}=1}\left(\frac{1-r_{OP}^2}{r_{PQ}^3}\right)f(Q)\,ds_Q,\qquad n=3.$$

データは，Qが境界に沿ってPに近づくとき，重みづけがより大きくなることに注意しよう．この公式はしばしばこの解の**Poisson積分表示**と呼ばれる．特に，Pを原点にとると，境界点Qはすべて等距離にあり，平均化が完全である．そして，この注意の初めに与えた平均値の定理

$$u(0)=\frac{1}{\omega_3}\oint_{|Q|=1}u(Q)\,ds_Q$$

が得られる．$r=1$でなく，半径rの球を考えることによって，そこに示された他の表示が同様にして得られる．

一般化：これはすべてに使える．なぜなら，基本特異関数が

$$S(P,Q)=S(r)=\frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}$$

にとられたからである．これを微分すると

$$S'(r)=\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$$

で，これはn次元空間の半径rの球の表面積の逆数に等しい*)．

問題1[†]発散定理を用いて，有界な好適領域Ω（図1.6h）上のDirichlet-Poisson問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で } \Delta u = f, \\ \partial\Omega\text{上 } u = g \end{cases}$$

に対する一意性を示せ．f，g，u，Ωについての正則条件を述べよ．

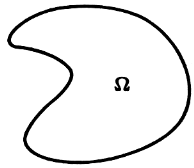


図1.6h

問題2．好適なΩ，∂Ω，gが与えられたとき，次の問題に対する解は常に存在すると考えられるか？

$$\begin{cases} \Omega\text{内で } \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上 } \dfrac{\partial u}{\partial n} = g\ . \end{cases}$$

この疑問を，発散定理を用いて解析せよ．また，同じ問題に対して一意性の疑問を用いて試みよ．

問題3．

上でいわゆる**第一種**（Dirichlet）と**第二種**（Neumann）**の境界値問題**を考えたから，次に**第三種境界値問題**を考えよう．すなわち，

$$\begin{cases} \Omega\text{内で } \Delta u = f, \\ \partial\Omega\text{上 } \dfrac{\partial u}{\partial n} + ku = g\ . \end{cases}$$

$k>0$（Robin条件）と$k<0$（Steklov条件；境界作用素の固有値）の両方の場合に対して，一意性を決定せよ．

＊）　このテーマに関してより深く進めるには，次を見られたい．F.John, *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations* (Wiley-Interscience,New York,1955)；J.L.Synge, *The Hypercircle in Mathematical Physics* (Cambridge Univ. Press,Cambridge,1957)．

†）　これらの問題は一意性を証明するための第二の主要な方法，いわゆるエネルギ-法の例証となる．$D(u, u)$をエネルギ-とみると，物理的に期待される様に，零デ-タの場合には，$D(u, u)=0$で示される．このとき，十分な正則性と零境界デ-タによって，解が零デ-タに対し0でなければならないと結論される．任意の線形作用素Lに対して，$Lu=f$に対する一意性は，$Lu=0$が自明解だけしか持たないことを示すことと同値であることを想起せよ．

1.6(1) 演習問題

1．(*a*)　ΩをR^3の有界な領域で，そこでは発散定理が成り立つとする．$x=(x_1, x_2, x_3)$とおく，Ωの体積は次式で与えられることを示せ．

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \frac{1}{3}\oint_{\partial\Omega} x \cdot n.$$

(*b*)　(*a*)をR^mの場合に拡張せよ．すなわち，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$のとき

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \frac{1}{m}\oint_{\partial\Omega} x \cdot n.$$

(*c*)　$\Omega=B_m(r)=\{x\in R^m ; |x| \leqq r\}$，$\partial\Omega=S_m(r)=\{x\in R^m ; |x|=r\}$のとき，次を示せ．

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \frac{r}{m} \cdot \mathrm{Area}\,(\partial\Omega).$$

$m=2$，3のとき，この公式の成り立つことを確かめよ．

2．(*a*)　次の公式に対して，$m=2$の場合に成り立つことを確かめよ．

$$\mathrm{Vol}\,(B_m(r)) = 2r\,\mathrm{Vol}\,(B_{m-1}(r)) \int_0^{\pi/2} \cos^m\theta\, d\theta.$$

(*b*)　$m=3$の場合に対して，(*a*)を繰返せ．

(*c*)　R^4における$B_4(r)$の体積および表面積を計算せよ．

3．(*a*)　$u''(x)=0$，すなわち，1次元の場合の解に対して，平均値の定理

$$u(P) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\oint_{r_{PQ}=r} u(Q)ds_Q$$

が成り立つことを確かめよ．

(*b*)　形式$u(x, y)=ax+by+c$をもつ$\Delta_2 u=0$の解はまた，平均値の定理を満たすことを確かめよ．

(*c*)　逆に，R^1で平均値の定理を満たすC^2級関数は調和的である，すなわち，$u''(x)=0$を満たすことを示せ．

1.6.2 不等式

不等式は解析学の基礎であり，このことは偏微分方程式の理論に対して特にそうである*)．一般に，偏微分方程式は解けなくても，近似することだけはできるということを，大雑把ではあるが，意味するものである．

*)　基礎的な微分不等式の幾つかは通常，ソ連の数学者Sobolevに因んで，**Sobolev不等式**と呼ばれる．特に，重要なものが本節で議論される．

二番目の基本的道具として，偏微分方程式だけに留まらず，数学全般にわたって有用な幾つかの不等式を簡潔に考えよう．それらの不等式の証明は本節の末尾で見出される．

最も重要な不等式は**Schwarzの不等式**[†]であって，これはFourier級数を理解する上で本質的である．

1. Schwarz不等式：$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$.

いわゆる内積[‡]（u, v）の用いられる状況に応じて，他の記号が用いられる：

$$\langle u, v\rangle,\ u\cdot v,\ \langle u \mid v\rangle,\ \int u(x)\,v(x)\,dx,\ \int u(x)\overline{v(x)}\,dx,\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i,$$

$D(u, v)$等々．すべての場合に，関数あるいはベクトルの内積空間で考察できることが前提となっている．すなわち，微積分学のドット積の性質すべてをもつ自然な内積が，そこで定義されている．これは次章で，Hilbert空間を議論するとき，より精密になされる．

Schwarz不等式[§]を幾何学的に理解する方法は，微積分学のときと同様，

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2| \cos\theta$$

である．ここで，$|\mathbf{v}|$はベクトル$\mathbf{v}$のEuclid的長さを示す．任意の内積に対して同様に

$$(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta$$

はuとvの間の角θ（図1.6i）を定義し，ノルム$\|u\|$は次で定義される．

$$(u, u) = \|u\|^2.$$

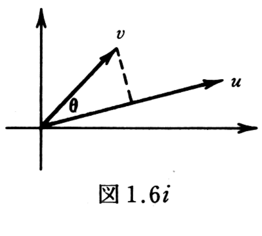


図 1.6i

†） 別のいい方をすると，フランスでは**Cauchy不等式**，ソ連では**Buniakowsky不等式**.

‡） 他の術語を挙げると，**ドット積**，**スカラー積**，**ケット**．ここで述べられる以外の性質については，節2.3参照.

§） これらの不等式の証明は，それらの幾何学的議論から示される.

Schwarz不等式に関連する不等式を次に挙げる.

1′. 算術平均–幾何平均不等式：$|(u, v)| \leqq \varepsilon\|u\|^2 + (4\varepsilon)^{-1}\|v\|^2$.

この不等式(簡単のため, **A-G不等式**と略記する)は, 内積評価において, ベクトルu, vに異った重みを与えたいとき, 常に有用である. Schwarz不等式とA-G不等式を結びつけて, 有界領域上のDirichlet-Poisson問題に対する安定性の結果を求めることにより, この点を説明しよう.

1″. Dirichlet-Poisson問題に対する安定性と近似： 次の方程式を考える.

$$\begin{cases} \Omega\text{ 内で } \Delta u = F, \\ \partial\Omega\text{上} \quad u = f. \end{cases}$$

$\overline{\Omega}$上で定義されたすべての好適な関数u (例えば, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$)に対して,

$$\int_\Omega u^2 \leqq c_1 \oint_{\partial\Omega} u^2 + c_2 \int_\Omega (\Delta u)^2 \qquad \textbf{(EST)}$$

の形式の不等式*)を探そう. いったんこれが得られると, 与えられたデ-タを用いて与えられた問題の特殊解uに関する**限界**がわかる. すなわち,

$$\int_\Omega u^2 \leqq c_1 \oint_{\partial\Omega} f^2 + c_2 \int_\Omega F^2.$$

さらに問題は線形であるから, 二つの解の差$u = u_1 - u_2$に対して, **安定性**

$$\int_\Omega |u_1 - u_2|^2 \leqq c_1 \oint_{\partial\Omega} |f_1 - f_2|^2 + c_2 \int_\Omega |F_1 - F_2|^2$$

が示される. 後者は真の解uに対する任意の近似φを考えることによる**近似の方法**となっており, その誤差限界は次式で与えられる ($c'_i \cong c_i$, 問題3a参照).

$$\|u - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqq c'_1\|f - \varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} + c'_2\|F - \Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

さて, 議論すべき**評価式 (EST)** を導こう.

この問題はその線形性によって, 二つの別の問題としてかき下ろされる†).

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\Delta h = 0, \\ \partial\Omega\text{上}h = f \equiv u \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} \Omega\text{内で}\Delta v = F \equiv \Delta u, \\ \partial\Omega\text{上} \ v = 0, \end{cases} \qquad u = h + v.$$

*)　この種の不等式はPDEの議論で, **ア-プリオリな評価式**と呼ばれる. その理由はそれらが十分に好適であるがそうでなくても任意の関数uに対して, 先験的に (すなわち, 前以って), いいかえるとデ-タFとfについて何も触れずに示されるからである. この様に, それらはここで示された**安定性**や**近似**の考察で役立つばかりでなく, PDEの理論で一般的な存在証明にとっても基礎となっている. 後者についてより詳しく知るためには, 問題2.9.5に与える文献を見よ.

このとき，A-G不等式から，

$$\int_\Omega u^2 = \int_\Omega (h^2 + v^2 + 2hv) \leqq (1 + \varepsilon)\int_\Omega h^2 + (1 + \varepsilon^{-1})\int_\Omega v^2. \quad (*)$$

変分的考察によって，ODEの場合節1.5.3で行ったと同様に，Fを用いてvが評価される．膜問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta w = \lambda w, \\ \partial\Omega\text{上}\ \ w = 0 \end{cases}$$

に対する第一固有値λ_1の変分的特徴づけ（節1.9.5(3)参照）は，形式的に方程式をw倍して積分するとわかる様に，

$$0 < \lambda_1 = \inf_{\partial\Omega\text{上}\ w=0}\left[\frac{-\int_\Omega w\,\Delta w}{\int_\Omega w^2}\right].$$

勿論，変分的特徴付けにおいて，wの正則性の族が指定されなかったが，その族は$C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$を含む．変分的特徴付けから，$\partial\Omega$上で消える任意の好適な関数$u$に対して，Schwarz不等式を適用すると

$$\int_\Omega w^2 \leqq \frac{1}{\lambda_1}\left(-\int_\Omega w\,\Delta w\right) \leqq \frac{1}{\lambda_1}\left(\int_\Omega w^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\Delta w)^2\right)^{1/2}$$

が成り立ち，よって上の二番目の問題のvに対して，

$$\int_\Omega v^2 \leqq \frac{1}{\lambda_1^2}\int_\Omega F^2 \equiv \frac{1}{\lambda_1^2}\int_\Omega (\Delta u)^2.$$

uによって定義されたhに対して，時には補助問題の方法，または数学的な観点から**共役問題**と呼ばれるものを用いよう．すなわち，ψを

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta\psi = h, \\ \partial\Omega\text{上}\ \ \psi = 0, \end{cases} \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta h = 0, \\ \partial\Omega\text{上}\ h = u = f \end{cases}$$

によって定義する．すると，Green第二等式によって

$$\oint_{\partial\Omega} h\frac{\partial\psi}{\partial n} - \oint_{\partial\Omega}\psi\frac{\partial h}{\partial n} = \int_\Omega h\,\Delta\psi - \int_\Omega \psi\,\Delta h\,.$$

また，上で定義された式を代入して，Schwarz不等式を用いると

†)　これらを“両面の読者諸氏”のために，事前的（すなわち，データは任意に与えられたuとΔuである）と事後的（すなわち，与えられたDirichlet-Poisson問題に対して，データfとFが与えられていると仮定する）な双方のやり方でかく．

$$\int_{\Omega} h^2 = \oint_{\partial\Omega} h \frac{\partial\psi}{\partial n} \leqq \left(\oint_{\partial\Omega} u^2\right)^{1/2} \left[\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2\right]^{1/2}.$$

補助問題（休止第2回の議論および演習問題5を参照）を用いると，境界$\partial\Omega$上で消える関数ψに対して，不等式

$$\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 \leqq k(\Omega) \int_{\Omega} (\Delta\psi)^2$$

が求まる．ここで，$k=k(\Omega)$はΩと$\partial\Omega$の形状に依存する定数である．後者の事実を受け入れると，

$$\int_{\Omega} h^2 \leqq k \oint_{\partial\Omega} u^2 .$$

よって，もとの不等式（＊）に代入して，望みの**アープリオリな**評価式

$$\int_{\Omega} u^2 \leqq c_1 \oint_{\partial\Omega} u^2 + c_2 \int_{\Omega} (\Delta u)^2$$

が得られる．ここで，$c_1=k(1+\varepsilon)$，$c_2=(1+(4\varepsilon)^{-1})\lambda_1^{-2}$で，$\varepsilon$は任意の正数である．最適の$\varepsilon$は二つの領域定数$\lambda_1$，$k$を用いて選ばれるであろう．

2.三角不等式：$\|u+v\| \leqq \|u\| + \|v\|$.

この不等式の意味するものはその名称にある．2次元空間の図1.6jにある様に，ノルム$\|\cdot\|$は長さと解釈される．例えば高等微積分学や初等トポロジーで示される様に，三角不等式*)はどんな距離空間†)にも典型的な性質であり，その距離空間の任意のx，y，zに対して

$$d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$$

として通常表される性質である．任意の集合Sは，x_1とx_2が同一点のとき$d(x_1, x_2)=0$，異なるとき$d(x_1, x_2)=1$と定義することによっても，距離空間として作られるので，これは先験的に三角不等式を非常に一般的にしている様に見える．しかしながら，偏微分方程式では集合Sは通常注意深く選ばれたベクトル空間であり，そこでは適切な距離を取り上げるのにある種の技術（または経験）が要求される．

＊）　別の呼称は**Minkowsky不等式.**

†）　距離空間とは“長さ”$d: S \to \boldsymbol{R}$を備えた集合Sである．ここで，dは次の3つの性質を満たす：（i）　$d(x_1, x_2) \geqq 0$；$d(x_1, x_2)=0 \Leftrightarrow x_1=x_2$，（ii）$d(x_1, x_2)=d(x_2, x_1)$，（iii）　$d(x_1, x_2) \leqq d(x_1, x_3)+d(x_3, x_2)$（三角不等式）．ノルム$\|u\|=d(u, 0)$はこれらの性質すべてと，さらに$\|cu\|=|c|\,\|u\|$をもつ．例えば，$\|-u\|=\|u\|$．

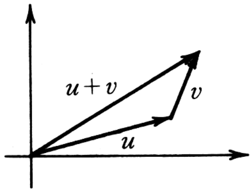


図1.6j

距離として，上の三角不等式は$d(u,-v)\leqq d(u,0)+d(0,-v)$と表されるし，さらに距離の記号法で$d(u,v)\leqq d(u,0)+d(0,v)$，およびノルム記号法で

$$\|u-v\|\leqq\|u\|+\|v\|$$

は加えたり減じたりして容易に得られる（問題1参照）．$\|u-v\|$に対する有用な下界は次のものである．

2′. 逆三角不等式（$\Delta^{-1}\leqq$と略記する）：

$$\|u-v\|\geqq\big|\,\|u\|-\|v\|\,\big|.$$

三角不等式（したがって逆三角不等式も同様）はSchwarz不等式よりずっと一般的である．なぜなら，前者にとって必要なものは距離をもつあるベクトル空間であるのに対して，後者では内積を必要とするからである．すなわち，Schwarz不等式は直交性の概念に内在的に関わっている．この状況を大雑把に次の様に述べられよう．三角不等式はベクトルまたは関数のすべての**Banach空間**に対して成り立つのに対して，Schwarz不等式は**Hilbert空間**と呼ばれるBanach空間の部分族でしか通用しない*)．Hilbert空間の非常に重要な概念は第2章で，Fourier級数を議論するとき，述べられるが，差し当って，最も重要な例，すなわち次の様に定義される$L^p(\Omega)$空間に注目することに留める．Ωをその上で通常の(dx) Lebesgue測度をもつn次元空間の任意の集合または領域とする；このとき

$$L^p(\Omega)=\left\{\text{関数 } f(x)\,\middle|\,\int_\Omega |f(x)|^p\,dx<\infty\right\},\qquad 1\leqq p\leqq\infty.$$

ここで，fは実数値または複素数値の関数である†)．$p=2$に対し，$L^2(\Omega)$がHilbert空

*) Banach空間においてさえも，**“半”内積**やSchwarz型の不等式を導入することができる．それらによって入れられた構造は発展系のエネルギー散逸を述べるとき，非常に有用である．次を見よ．Bonsall and Duncan, *Numerical Ranges* I, II (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971, 1973)；J.P. Antoine and K. Gustafson, Partial inner product spaces and semi-inner product spaces, *Adv. in Math.*, **41** (1981)．Hilbert空間とBanach空間の定義に対しては，節2.3を見よ．

†) 関数解析学の多くの参考書や幾つかの応用では，複素数値でなければならない．ここでは簡単のため，ほとんど$f(x)$を実数値として扱う．後者は例えば，連続体力学での応用に対して十分間に合う．

間であることを知るだろう．他のものはBanach空間である．$p=\infty$の特別な場合は，実際“最大値ノルム”の場合であって，$\sup_{\Omega_{a.e.}}|f(x)|<\infty$を意味するものとされる．ここで，$\Omega_{a.e.}$はLebesgue測度が0である部分集合を除いて，**“Ωの殆んど到る所で”**を意味する．

ここでは，**Lebesgue測度**や**Lebesgue可積分問題***)の専門的事項に立ち入らないで，その代りに，“区分的にC^1級関数の列を考え，極限の積分をその列の積分の極限として定義する”と述べるに留めよう．考える関数やデ-タの多くは，実際微積分学で親しんできた通常の滑らかな**Riemann可積分関数**であるだろうが，**Lebesgue可積分関数**は極限のもとで閉じていて，よってより大きな関数族であるから，その主たる長所を体得することは重要なことである†)．

重要な特別な場合は，例えば$L^2(-\infty, \infty)$とか$L^2(0, \pi)$である．Fourier級数を議論するとき，$L^2(0, \pi)$，$L^2(-\pi, \pi)$，$L^1(-\pi, \pi)$が強調される様に見える．すべてのpに対して，ノルムは次式で与えられる．

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p} .$$

Schwarz不等式に関係する非常に重要な変形は**Hölder不等式**である．

2″　Hölder不等式（L^p空間に対して）：

$$\int_\Omega |fg| \leqq \|f\|_p\|g\|_q, \qquad p^{-1}+q^{-1}=1 .$$

$p=2$のとき，いわゆる共役指数qもまた値2をとり，Hölder不等式はSchwarz不等式に帰着される．すなわち

$$\int_\Omega |fg| \leqq \|f\|_2\|g\|_2 .$$

別のいい方をすると，Hölder不等式は，$f\in L^p$かつ$g\in L^q$のとき，$fg\in L^1$．すなわち，fgが可積分関数，つまりその積分は有限であることを主張する．

3.Sobolev不等式：

$$\|u(P)S(P, Q)\|_{L^2(R^3)} \leqq (1/2\pi)\|\text{grad } u\|_{L^2(R^3)} .$$

別のいい方をすると，有界な台をもつ任意の滑らかな関数，すなわち，ある十分に大きな球の外側で零である関数uに対して，$y\in R^q$を任意に固定して

$$\int \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\, dx \leqq 4\int |\text{grad } u|^2\, dx.$$

*）優れた参考書を挙げておく．E.Asplund and L.Bungart, *A First Course in Integration* (Holt,Reinbert, and Winston,NewYork,1966)．また，節1.9.6(3)におけるLebesgue優収束定理を参照せよ．

†）この点に関して，教授者はこれらの注意を認めてほしいものである．

ここで，3次元空間の二点に対して，$x \equiv P = (x_1,\ x_2,\ x_3)$，$y \equiv Q = (y_1,\ y_2,\ y_3)$ なる記法が用いられた．これは便宜上今後も用いられる．

3′ 原子の崩壊しない理由： Schwarz不等式とSobolev不等式を用いて，なぜ原子が安定であるか，すなわち，なぜ電子は諦めることなく原子核の中へ落ち込まないかを示すことができる．以下に示す議論は水素原子に対するものであるが，面倒ながら，他のすべての原子へ拡張できる．

示したいことは，原子核のまわりの電子の運動による運動エネルギ-が十分に大きくて，原子核方向へ電子を引きつけるポテンシャル・エネルギーと釣合うことである．この運動エネルギーは$\frac{1}{2}D(u,\ u)$で表され，Coulombポテンシャル$1/r$によるポテンシャル・エネルギーは$\int(1/r)\,u\cdot u$で表される．正味のエネルギ-準位はSchrödinger方程式

$$-\tfrac{1}{2}\Delta u - \frac{Z}{r}u = \lambda u$$

に対する固有値問題のλによって与えられる．ここで，$u \in L^2(R^2)$，かつuは遠方で十分急速に消えるとする．実際，$u \in C_0^\infty(R^3)$，すなわち，コンパクトな台をもった無限回可微分関数にとることができる*)．すなわち，関数uは，技術的に考えて近似により作用素の領域内ですべて必要なuへ移行できるから，ある十分に大きな球の外側で消えるものとする．方程式は原子単位あるいはHartree単位でかかれ，Zは電荷を表す．

先づ，単位電荷$Z=1$について考えよう．uを方程式に乗じて$\Omega = R^3$上で積分し，Greenの第一等式を用いると，楕円型作用素についてこれ迄行った様に，λのエネルギー・スペクトル値の変分的特徴付け

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}D(u,\ u) - \int(1/r)u^2}{\int u^2}$$

が得られる．すべての固有値λに対して下界の存在が示されれば，原子は安定である．原子のBohr模型（図1.6k）において，電子はある軌道に制限され，j番目軌道からより近いi番目軌道へ落ち込むとき，エネルギ-λ_i-λ_jを放出する．すべてのエネルギー値λに対する下界の存在は，電子がそれ以下にまで落ち込まない最小の，あるいは **“基底状態”** の軌道を保証する．

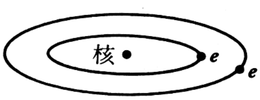


図 1.6k

*） これは **“test関数”** とも呼ばれる．$L^2(\Omega)$におけるtest関数全体C_0^∞の稠密性の証明については，問題2.9.3を見よ．

さて，Schwarz不等式，A-G不等式，Sobolev不等式によって，ポテンシャル·エネルギーの項に対して$L^2(R^3)$ノルム記法$\| u \| = \left[\int_{R^3} |u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$を用いると，

$$\int \frac{1}{r} u^2 \leqq \left\| \frac{1}{r} u \right\| \|u\| \leqq 2D(u, u)^{1/2} \|u\| \leqq \varepsilon D(u, u) + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|^2$$

が得られ，よって

$$\lambda \geqq \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) D(u, u) - \frac{1}{\varepsilon} \|u\|^2}{\|u\|^2}.$$

ここで，$\varepsilon = 1/2$ にとって，エネルギーλの下界が得られ，

$$\lambda \geqq -2.$$

上で用いた一連の不等式には，当然，ある曖昧さがあった．水素作用素のスペクトルは正確に見出され（図1.6l），負の固有値$\lambda_n = -1/2n^2$，$n=1, 2, 3, \cdots$以外に正の“連続な”スペクトル$[0, \infty)$*)もある．固有値λ_nに対する固有関数$u_n(x)$は，“束縛状態”と電子を原子核のまわりに拘束する軌道に対応し，結局，最低エネルギ-λ_1と対応する**“基底状態”**に移ろうとする．$[0, \infty)$ 内の正のエネルギ-λは**“散乱状態”**に対応し，そこでは運動のエネルギ-が勝って，電子は結局外方へ飛び去る．

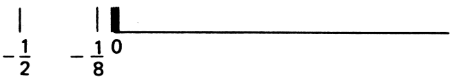


図1.6l　水素作用素のスペクトル

以上$Z=1$の場合を考えたが，より高い電荷に対しては$1/r$をZ/rでおきかえて，同様の結果が得られる†)．その場合，$\varepsilon = 1/2Z$ にとってエネルギー下界値$-2Z^2$が求められる．真の負固有値は$\lambda_n = -Z^2/2n^2$，$n=1, 2, 3, \cdots$である．

不等式の証明

実数の場合におけるSchwarz不等式の簡単な証明は，実2次多項式が実の零点をもつために，判別式が非負で，また，そのときに限られるという事実にもとづく．

*）　連続スペクトルのより詳しい議論については，節2.7を見よ．

†）　人工元素を許しても，現在知られている電荷の上限は137である．電荷116，124，126，127に対応する超重元素の存在の新証拠については，Mica giant halos suggest natural superheavies, *Physics Today,* August (1976)，17-20．の議論を見よ．最近の研究でも未解決である．

$$Q(t) \equiv (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + t(2(u, v)) + t^2\|v\|^2$$

とおこう．$Q(t) = \|u + tv\|^2 \geqq 0$から，判別式$\leqq 0$．すなわち，

$$4(u, v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqq 0.$$

これはSchwarz不等式そのものである．明らかに等号の成り立つのは，uがvのスカラー倍であるときに限られる(問題1参照)．複素数の場合は，$(v,\ u) = \overline{(u,\ v)}$であるから，$(u,\ v) + (v,\ u) = 2Re(u,\ v)$ に注意しながら扱えばよい．

A-G不等式は $(a-b)^2 \geqq 0$から得られる．すなわち，

$$2ab \leqq a^2 + b^2.$$

これは古典的な算術平均と幾何平均の比較

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a + b}{2}$$

を含み，$\sqrt{a} = (\sqrt{2\varepsilon})u$，$\sqrt{b} = (1/\sqrt{2\varepsilon})v$とおいて，次を得る．

$$uv \leqq \varepsilon u^2 + (4\varepsilon)^{-1}v^2.$$

Schwarz不等式から同様にして，A-G不等式が得られる．

$$|(u, v)| \leqq \|u\|\|v\| \leqq \varepsilon\|u\|^2 + (4\varepsilon)^{-1}\|v\|^2.$$

Hilbert空間の場合，三角不等式は容易にSchwarz不等式から得られ，

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2Re(u, v)\\ &\leqq (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

逆三角不等式の証明は問題1にまかせる．

Hölder不等式を示すには幾つかのやり方がある．例えば，二つの正数a，bに対するYoung不等式*)

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1$$

から示される．この不等式はA-G不等式の$p \neq 2$の場合への一般化である．Young不等式に$a = |f|/\|f\|_p$，$b = |g|/\|g\|_q$を代入し，積分すると

$$\frac{\int |fg|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqq \frac{1}{p}\frac{\int |f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = 1.$$

よって，Hölder不等式が証明された．

*)　また，Young不等式より一層一般的な不等式もある．大雑把にいえば，$Q(t)$や$R(t)$よりももっと一般の関数に対応するものである．

Young不等式は有理関数

$$R(t) = p^{-1}t^p + q^{-1}t^{-q}, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1, \qquad t > 0$$

から示される．ここで，$R(t)$ は$t=1$で極小となる狭義の凸関数である．すなわち，次の性質をもつ関数である．

$$R'(t) = t^{p-1} - t^{-(q+1)}, \quad R'(t_0) = 0 \Rightarrow t_0^{p+q} = 1 \Rightarrow t_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} R''(t) &= (p-1)t^{p-2} + (q+1)t^{-(q+2)} \\ &= q^{-1}pt^{p-2} + (q+1)t^{-(q+2)} > 0. \end{aligned}$$

よって，$R(a^{1/q}b^{-1/p}) \geqq R(1)=1$から，Young不等式を得る．

Sobolev不等式はGreen第一等式とSchwarz不等式を用いて示される．十分に大きな固定されたx，yに対して消える任意の滑らかな関数uに対して，

$$\left\| \frac{u}{|x-y|} \right\|_2 \leqq 2D(u, u)^{1/2}$$

というSobolev不等式を述べてきた．ここでも前と同様，$D(u,u)=\int |\,\mathrm{grad}\,u|^2$が用いられ，よってこの積分は$R^2$すべてについてとられるべきであるが，実際には関数$u$をささえる有界領域Ω上についてのみ考えればよい（図1.6m）．計算は次の通り：以下の体積積分は関数$u(x)$ の台を含む球の内部でとらえるものとし，

$$r = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2} = |x - y|$$

とおく．すると，Green第一等式によって

$$D(u^2, \ln r) = \oint u^2 \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) - \int u^2\, \Delta(\ln r) = \int \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}.$$

ここで，面積分は消え，$\Delta(\ln r) = -1/r^2$*)．他方，Schwarz不等式（の二つの応用）および，関係

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} = 1$$

によって，

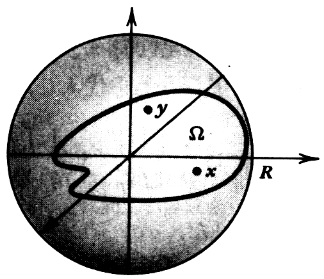


図1.6m

$$
\begin{aligned}
D(u^2, \ln r) &= \int \mathrm{grad}(u^2) \cdot \mathrm{grad}(\ln r) \\
&= 2\int u \sum_{i=1}^{3} u_{x_i} \frac{(x_i - y_i)}{|x - y|^2} \\
&\leqq 2\left[\int \frac{u^2(x)}{|x - y|^2}\right]^{1/2} D(u, u)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

これから，Sobolev不等式が得られる．

問題1．(*a*)　Schwarz不等式の等号が成り立つのは，uがvのスカラ-倍のときで，そのときに限られることを証明せよ．(*b*)　逆三角不等式を，三角不等式とノルム$\|u\|$について論ぜられた性質から確かめよ．

問題2．(*a*)　n次元空間の任意の滑らかな有界領域Ω上で，EVP

$$
\begin{cases}
\Omega \text{ 内で } -\Delta u = \lambda u, \\
\partial\Omega \text{ 上 } \quad u = 0
\end{cases}
$$

を考え，固有値λ_nの変分的特徴付けを形式的に導け．(*b*)　Ωが正方形の場合に変数分離法を用いて，λ_nと対応する固有関数$u_n(x, y)$を求めよ（図1.6n）．

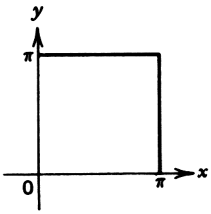


図1.6n

＊）　途中の計算の幾つかを示そう：　　$r^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2$　から

$$
\left(\frac{1}{|x - y|}\right)_{x_i} = -\frac{(x_i - y_i)}{|x - y|^3}, \quad (\ln r)_{x_i} = \frac{x_i - y_i}{r^2} = \frac{1}{r} r_{x_i},
$$

$$
r_{x_i} = \frac{x_i - y_i}{r}, \quad r_{x_i x_i} = \frac{r^2 - (x_i - y_i)^2}{r^3},
$$

$$
(\ln r)_{x_i x_i} = \frac{1}{r} r_{x_i x_i} + \left(\frac{1}{r}\right)_{x_i} r_{x_i} = \frac{r^2 - (x_i - y_i)^2 - (x_i - y_i)^2}{r^4}.
$$

問題3．本文でL^2ノルムを用いて求めたDirichlet-Poisson問題の安定性の結果

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leqq c_1\|f_1 - f_2\|^2 + c_2\|F_1 - F_2\|^2$$

に関して，次の問に答えよ．(a)　本文でなされた議論と同様，

$$a \leqslant c_1'b_1 + c_2'b_2 \quad \text{および} \quad a^2 \leqslant c_1 b_1^2 + c_2 b_2^2$$

の様な不等式の間をどの様に結びつければよいか？(b)同じ問題に対して，最大値ノルムにおける同様の安定性の結果を求めよ．(c)与えられた有界領域Ωと，そのΩで$\Delta u=0$を満たす関数$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$に対して，

$$\int_\Omega u^2 \leqq (\text{定数})\oint_{\partial\Omega} u^2$$

の形式のア-プリオリな評価式を直接得られるのはどんな場合か？

1.6(2)　演習問題

1．Schwarz不等式を次の各場合に対して，かき下ろせ．(a)3次元Euclid空間．(b) Dirichlet積分$D(v)=\int_\Omega |\text{grad}u|^2$．($c$)無限次元ベクトル$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots)$．

2．問題1の(a)，(b)，(c)の各場合に対して三角不等式をかき下ろせ．

3．(a)問題1の(a)あるいは(c)から(b)を証明せよ．
(b)$x=(4,\ 5,\ 6)$，$y=(7,\ 8,\ 9)$に対して，Schwarz不等式を確かめよ．
(c)これらのベクトルの向きは，ほぼ同じか，そうでないか？

1.6.3．収束定理

ある種の偏微分方程式の解または提案された解を議論するとき，次の収束定理を頭に入れておくと，後々で役に立つ．初めにここだけでなく，数値解析や信号解析，またその他の数学やその応用の分野でも出会う共通な三つの型を思い起こそう．有限区間$[a,\ b]$上の結果を述べるが，それらはn次元空間の任意のより一般的な無理のない有界閉領域$\overline{\Omega}$上でも同様に成り立つだろう．u_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) を$a \leqq x \leqq b$上で定義された関数列とする．$u(x)$を極限関数の候補とする．

1．関数列の点別収束． $[a,\ b]$ 内の各xをとると，任意の$\varepsilon>0$に対して，$N=N(x,\varepsilon)$が存在して，すべての$n>N$に対して$|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon$とできる．このとき，$u_n(x) \to u(x)$は$[a,\ b]$上で**点別収束**である．図1.6$o$で説明される意味は，$u_n(x)$が少なくとも点$x$で$u(x)$のまわりの半径$\varepsilon$の管の中にすべて含まれてしまうことである．

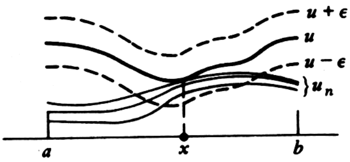


図 1.6o

2.関数列の一様な(点別)収束. 任意の与えられた$\varepsilon>0$に対して，$N=N(\varepsilon)$が存在して，すべての$n>N$に対して$|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon$とできる．このとき，$u_n(x)\to u(x)$は［$a, b$］上で**一様に(点別)収束**である．図1.6$p$で説明される意味は$u_n(x)$が結局区間全体にわたって$u$のまわりの半径$\varepsilon$管内にすべて含まれることである．上述の点別収束の定義を用いると，Nはxに関係なく定められることを意味する．ノルムを用いると，連続関数(すなわち$v\in C^0[a, b]$)に対して

$$\|v\| = \max_{a\leq x\leq b} |v(x)|$$

とすると，u_nのuへの一様収束を次の様にかくことが可能である．

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

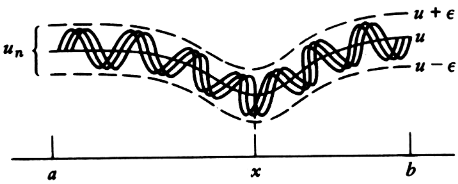


図 1.6p

3.関数列の(根)平均2乗(RMS)**収束.** 任意の与えられた$\varepsilon>0$に対して，$N=N(\varepsilon)$が存在して，すべての$n>N$に対して

$$\left[\int_a^b |u_n(x) - u(x)|^2 \, dx\right]^{1/2} < \varepsilon$$

とできる．このとき，$u_n\to u$は**(根)平均2乗収束**である．図1.6qに説明される様に，たとえ減少部分区間上の点別相対誤差が制御の範囲を超えていても，$u_n(x)$と$u(x)$の間で2乗した面積が結果的に任意に小さくなることである．ノルムを用いると，任意の2乗可積分関数(すなわち，$v\in L^2(a, b)$)に対して，$\|v\|^2=\int_a^b|v(x)|^2dx$とするとき，$u_n$の$u$へのRMS収束は

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

とかける．これはより一般に$\boldsymbol{L^2}$**収束**と呼ばれ，Hilbert空間$L^2(a, b)$における収束を表す．

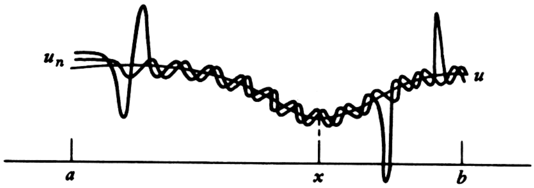


図 1.6q

同じ定義を，無限級数の部分和u_N(標準的慣例に従って，部分和を示すには小文字nでなく大文字Nが用いられる)に適用すると，(無限)級数は常に部分和の数列$\{s_N\}$の極限として定義されるから

$$u_N(x) \equiv s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x),$$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{N\to\infty} s_N(x).$$

通常無限級数では，"lim"は点別収束の意味で，各xに対する点別極限が存在するものと暗黙のうちに仮定している．しかし，"lim"は上の第三の意味でとられたとする方がよく，一般のFourier級数を議論する際には全くその様にしている．

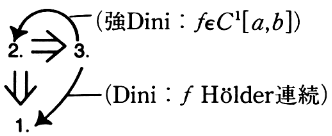
極限関数の性質．　列$\{u_n(x)\}$は与えられているが，その極限関数の候補$u(x)$が知られていないとき，収束に対するいわゆるCauchy判定法は非常に有用である．この判定法では，十分に大きなnとmに対して，u_n-u_mを十分小さくとれることを保証する．このとき通常，列$\{u_n\}$が収束する極限関数uの存在がわかる*)．

この様に，(1)点別収束はすべてのn，$m \geqq N$に対して$|u_n(x)-u_m(x)|<\varepsilon$となり，(2)一様(点別)収束はすべての$n$，$m \geqq N$と$[a,\ b]$内のすべての$x$に対して$|u_n(x)-u_m(x)|<\varepsilon$となる．(3) RMS ($L^2$) 収束はすべての$n$，$m \geqq N$に対して$\int_a^b |u_n(x)-u_m(x)|^2 dx<\varepsilon$となる．簡単な例(節1.5.3問題3の列$u_n(x)=x^n$)で示され

*)　数学者にとって，これは殆んど信奉的な事柄である．実際，欲しい極限$u(x)$が陽的に存在しなくても，数学者はこれでもってその存在を定義するといっていることは，幾分失礼ながらこの事情を表している．このとき生ずる系は"**完備**"であるといわれるだろう．ただし，それが理想化された点を加えて"針穴を埋める"ようになされることだけでも，事実完備であるかも知れない．"完備"なる言葉の意味は，結局，出会ったとき常に，"針で留めておく"べきことであろう．上の点別収束(1)に対する完備性は実数体系の構成の公理からわかる．大雑把にいって，無理数のCauchy列の極限には，加えるべきものは何もない．上の一様収束(2)に対する完備性は，数学者によれば次の様に述べられる．すなわち，最大値ノルムにおいて，$C^0[a,\ b]$はBanach空間であり，RMS収束(3)の完備性は，$L^2(a,\ b)$がHilbert空間で，Lebesgue積分の概念を必要とするということになる．これらの概念は節2.3で詳しく論ぜられる．

る様に，連続関数の点別極限は必ずしも連続でないが，一様収束に対するCauchy判定法を満たす列$\{u_n(x)\}$は，微積分学で示される様に，連続な極限関数をもつ．同じく，Lebesgue積分論はCauchy判定法の意味で，L^2極限関数$u(x)$の存在がL^2で収束するあらゆる列$\{u_n(x)\}$に対して保証される様に，十分一般的な可積分関数を扱う．

収束の三つの型の間の関係． 要するに次の図式を考えればよい．



二つの含意⇒は容易である．一様点別収束(2)⇒点別収束(1)は定義から，また(2)⇒(3)はSchwarz不等式を用いて示される．二つの(**Dini判定**と呼ばれる)含意→は特別の場合に成り立つ．すなわち，$u_N \equiv s_N$が指示された連続性をもつ関数$u \equiv f$に対するFourier(三角)級数の第N項部分和となっている場合である．この様なDini判定の点別収束を保証するより進んだ議論については問題1.9.6(2)を見よ．

ここで肝心の点は，与えられた関数fのFourier級数表現が(第2章で示される様に)(3)のL^2の意味で常に収束するであろうが，特別な場合でのみそしてDini判定のときの様な附加的な仮定のもとで，fに点別収束する(問題1.9.6(2))．

この最後に触れた点を熟慮し，強調しながら，節1.5.1で論じた様に，変数分離法を用いて偏微分方程式を解いたとき，与えられたデータfはFourier級数としてかかれた．すなわち

$$f \cong \sum c_n \varphi_n .$$

ここで，c_nはその適用に際しての適当な内積$(f,\ \varphi_n)$である．例えば，そしてはっきりさせるため，区間$0 \leqq x \leqq \pi$ 上で$f \in L^2(0,\ \pi)$に対して，fのFourier正弦級数展開が用いられた．そのとき，

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin nx ,$$

$$c_n = \int_0^{\pi} f(s)\varphi_n(s)\, ds .$$

さて，$u_N(x) \equiv s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(x)$，すなわち，最初の$N$項からなる部分和で打切ったFourier級数とする．このとき，どんな意味で$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$かという疑問が生ずる．節2.3で議論されるFourierの理論は，L^2の意味で，すなわち上の収束(3)の意味で，常に$s_N \to f$なることを示す．さらに，$f(x)$がx_0で**Hölder連続***⁾であるとき(Dini判定によって(問題1.9.6参照))，x_0で点別収束，すなわち，上の収束(1)の意味で，$s_N \to$

f. さらに, fがこの区間で連続可微分関数, すなわち$f \in C^1[0, \pi]$, かつ$f(0)=f(\pi)$なる(必要)条件を満たすとき, この区間上で一様に点別収束して, $s_N \to f$.

問題1. 上の図式の含意(2)⟹(3)を確かめよ.

問題2. (*a*) $[0, \pi]$ 上の$f(x)=x$に対し, Fourier正弦級数を決定せよ.
(*b*) Fourier部分和$u_N(x) \equiv s_N(x)$に対し, 三つの収束性を議論せよ.

問題3. $[0, 1]$ 上の数列$\{u_n(x)=x^n\}_{n=1}^{\infty}$に対し, 収束性の三つの型を論ぜよ.

収束性の三つの型に対する十分条件.　定数項u_nの級数Σu_n(または, xを固定した級数$\Sigma u_n(x)$)の点別収束(1)に関しては, 微積分学で, 数多くの判定法がある. ここでは後々のために, **d'Alembertの判定法**または**比判定法**を復習しよう. すなわち, Nと$\rho<1$が, すべての$n \geqq N$に対して$|u_{n+1}/u_n|<\rho$となる様に存在するとき, 与えられた定数項級数Σu_nは収束して, さらに絶対収束する. 念押しすると, このρは$n \geqq N_A$かつ$n \geqq N_B$のときはいつでも, 任意の与えられた$\varepsilon>0$に対してそれぞれ, $|A-s_N|<\varepsilon$と$|B-r_N|<\varepsilon$を満たす数AとBが存在することを意味する. ここで, $s_N=\Sigma_{n=1}^{N} u_n$, $r_N=\Sigma_{n=1}^{N}|u_n|$はこの級数の収束する部分和である.

一様収束(2)に対する最も重要な判定法は**WeierstrassのM-判定法**である. すなわち, 区間$a \leqq x \leqq b$上で定義された級数の各項$u_n(x)$が与えられたとする. 各n=1, 2, 3, …に対して $[a, b]$ 上で$|u_n(x)| \leqq M_n$かつΣM_nが収束するとの意味で, 定数項の優級数ΣM_nが見出されるとき[†], Σu_nは $[a,b]$ 上一様に点別収束する. 注目すべきことは, 初めの任意の有限個の項は収束性に関わりをもたないから級数Σu_nの末尾を押さえることだけが必要なことである. また, 区間上で行う必要はなく, 任意の点集合で行ってよい.

L^2型の収束(3)を深く研究するには, Lebesgue積分と初等測度論の知識が必要である. ここでの目的で, 最も重要な事実は次であり, それは節2.3で詳しく議論される. 2乗可積分関数$f \in L^2[a, b]$ はそのFourier級数の部分和$=s_n(x)=\Sigma_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$[§]

*)　関数fが区間 $[a, b]$ 内の点x_0で指数αのHölder連続である(あるいは, 位数αの**Lipschitz条件**を満たす)といわれるのは, $[a, b]$を含む区間内のすべてのxに対して$|f(x)-f(x_0)| \leqq M_\alpha |x-x_0|^\alpha$となる$\alpha>0$と$M_\alpha>0$が存在するときである. $\alpha=1$の場合は**Lipschitz連続**と呼ばれ, $\alpha=M_\alpha=1$の場合は**縮小的**(またはより良い術語として, **非拡大**)と呼ばれる. Hölderの連続性条件はfのx_0での傾きに関する制限とも見られ, fをそこで連続関数と可微分関数(fが可微分でないときでも)の間のどこかに位置づける.

†)　この様に, この判定法を用いて, u_nとの比較を試みるには, 二, 三の通常の定数項の収束級数に慣れておくと都合がよい.

§)　節2.3で詳しく議論される様に, $\varphi_k, k=1,2,3,\cdots$が**極大正規直交系**と呼ばれるものを形成するときに, である.

がL^2の意味（上記(3)の根平均2乗の意味）で，fに常に収束するという性質をもつ．ここで，この級数によって定義される関数$\Sigma_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$がたとえ各点で$f$に等しくなくても，この性質は成り立つ．この様に，PDEを扱い，任意の与えられたデータfと解uに対してFourier展開を仮定するとき，すべての都合のよい関数は2乗可積分であるから，かなり安全な場所にあるといえる．ただ，気をつけなければならないことは，“点別の”振舞いがどうなっているかということである．

項別微分法*)．　級数を項別に微分することに対する次の判定定理は，変数分離法の正しさを確かめる上で基本的に重要である．

定理D

次が成り立つとき，$(\Sigma u_n(x))' = \Sigma u_n'(x)$．

i）　関数$u_n(x)$は連続可微分である．すなわち，$u_n(x) \in C^1[a, \ b]$．

ii）　級数$\Sigma u_n(x)$は点別収束する．

iii）　導関数の級数$\Sigma u_n'(x)$は一様に点別収束する．

定理Dのプライム(′)は，証明が同じであるから，常微分であっても偏微分であってもよい．

積分のもとで微分することは定理Dを和から積分へ一般化した結果であるとみなされ得る．例えば，いわゆる**Leibnizの公式**

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx = f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\,dx$$

がある．ここで，a'，b'，$\partial f/\partial y$は連続でさえあればよい．

Lebesgue積分を用いてより一般的な関数へ項別微分法をどの様に拡張するかについて，多少考えを深めるため，次の定理Dの一般化を述べよう．$(\Sigma u_n)' = \Sigma u_n'$が“殆んどいたる所で”成り立つのは，$u_n$が“局所有界変動関数”でかつ$\Sigma$($u_n$の全変動）が収束するときである．例えば，$u_n(x)$が連続な増加関数で，その級数$\Sigma u_n(x)$が点別収束するときは，これが成り立つ．

同様に，積分のもとでの微分法の一般化は，**基本Lebesgue優収束定理**†)（**LDC定理**と略記する）を利用して得られる．この定理は，可積分関数$u_n(x)$が（殆んどいたる所で）$u(x)$に点別収束し，一様有界でかつ$|u_n(x)| \leqq M(x)$なる可積分関数$M(x)$があるとき，$\int u_n(x)\,dx \to \int u(x)\,dx$．$u_n(y) = f(x, \ y+\Delta_n y) - f(x, \ y)$とおくと

$$\frac{d}{dy}\int f(x, y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int \frac{u_n(y)}{\Delta_n y}\,dx$$

*）　定理Dの証明および一様点別収束やLeibnizの公式に関する他の関連した事実に対しては，どんな高等微積分学の参考書にも出ている．

†）　これに関する幾つかの詳細については問題1.9.6(3)を見よ．

を介してLDC定理により$(d/dy)\int f(x, y)\,dx$を得る．

項別積分法．　項別に積分することは問題ない．上述の様に，Lebesgue優収束定理によって，u_n-uに関する非常に一般的な点別収束の仮定のもとで

$$\int u_n \to \int u\,.$$

通常用いられる高等微積分学での表し方は次の様になる：$\Sigma u_n(x)$が区間$[a, b]$上で一様収束し，各u_nがそこで連続(よって可積分)であるとき，

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)\,dx\right).$$

いいかえると，$s_N(x)$が$[a, b]$上で連続で，かつ$f(x)$に一様収束するとき，$\int_a^b s_N(x)\,dx$は$\int_a^b f(x)\,dx$に収束する．

本節で，偏微分方程式を研究する際用いられる三つの重要な数学的道具，すなわち，発散定理，不等式，収束定理を考えてきた．

上で議論された様に，収束定理は，確率論の微妙な問題からかなり一般的な特異積分作用素の理論までの広がりをみせる**ポテンシャル論**と呼ばれる数学の主題の一局面を荷っている．問題1.9.5(2)に，発散定理の使用が許されない例外領域に対する疑問の簡潔な議論が見出される．本書の残りの部分では，その様な領域は考えないこととしよう．

不等式はそれ自身が一つの研究主題である．*)

問題1.9.6はFourier級数の点別収束について加えられるべき歴史上の注意，点別収束に関するDiniの判定法の証明，いわゆるGibbs効果に気をつけること，そしてLebesgue収束定理に関する多少の注意を含む．ここで，Gibbs効果は，関数の不連続点の近くで，Fourier級数の和を計算するときに現れる．

1.6(3)演習問題

1. (*a*)次の方程式の解を，べき級数$u(x)=\Sigma_{n=0}^{\infty}a_n x^n$として，項別微分法を用いて求めよ．

$$\begin{cases} u'(x) = u(x), & x > 0, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

*)　例えば次を見よ．G.H.Hardy,J.E.Littlewood and G.Polya,*Inequalities,*2nd ed.(Cambridge Univ.Press,London,1952)；E.F.Beckenbach and R.Bellman,*Inequalities* (Springer,New York,1971)；D.S.Mitrinovich,*Analytic inequalities* (Springer,New York,1970)．

(*b*) 次の熱方程式問題の解を，級数$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,\ 0)\,t^n$として求めよ．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

(*c*) 次の熱問題を，(*b*)の形の級数として解け．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

2. (*a*) $e^x=1+x+x^2/2!+\cdots$を項別に積分して，$\int_0^x e^s ds$と比較せよ．

(*b*) 比判定法を用いて，$u(x)=\sum\frac{1}{n}x^n$が$|x|<1$で絶対収束することを示せ．

(*c*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$は項別微分が可能であり，従って，

$$u(x) = -\ln(1-x)\ , \quad |x| < 1$$

の成り立つことを示せ．

3. (*a*)　$n=2$の極座標で勾配を計算せよ．

(*b*)　極座標でLaplace作用素$\varDelta_2$が

$$\Delta_2 u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta}$$

で与えられることを思い出して，$\varDelta_2(r^m)=m^2r^{m-2}$およびgrad$(r^m)=mr^{m-1}(\cos\theta,\ \sin\theta)$なることを確かめよ．

(*c*)　2次元で$r<1$に対して，$u=1/(1-r)=1+r+r^2+\cdots+r^m+\cdots$とおく．この級数展開を項別に積分して，Neumann両立関係

$$\oint_{r=R<1}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_{r\leqq R<1}\Delta_2 u dx$$

を確かめよ．

休止　第2回：例題，説明，演習

発散定理と不等式の間の相互関係は偏微分方程式の理論と応用の魅力的かつ本質的な部分である．休止第1回の最後の例題をふり返ってみよう．ここでは，偏微分方程式で平板の問題を考える．

例題

任意の形の嚙み締め(弾性)平板の第一座屈固有値Λ_1は，同一の本来の形の固定膜の第二振動固有値λ_2によって，下から押さえられることを変分的に示せ．

解答．　本来の形状(あるいは恐らく内容をよく表す術語で**配図**)とは，ここでは領

域Ωを意味する．ここで必要なただ一つの滑らかさは，Ωがその上で定義された関数について発散定理の使用を可能とする事である．興味ある二つの問題を思い出そう．

$$\text{平板：}\quad \begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta^2 u = \Lambda \Delta u, \\ \partial\Omega\text{上} \qquad u = 0, \\ \partial\Omega\text{上}\quad \partial u/\partial n = 0. \end{cases}$$

$$\text{膜：}\quad \begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta w = \lambda w, \\ \partial\Omega\text{上} \qquad w = 0. \end{cases}$$

先の休止での1次元の場合に対する証明の末尾で，次の不等式の1次元についての解釈が必要であった：

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \Big/ \int_\Omega u^2 \leqq \int_\Omega |\Delta u|^2 \Big/ \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2.$$

これのより一般的な多次元での解釈は，前と同様，Green第一等式とSchwarz不等式を結びつけてわかる．

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 = -\int_\Omega u\Delta u \leqq \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\Delta u)^2\right)^{1/2}.$$

ここで，uが$\partial\Omega$上で消えることだけが用いられたことに注意しよう．

さて，本題に戻って，初めに2次元空間の場合を考えることがより容易であるし，物理学的にも適しているであろう．その後空間次元を増加させて一般化することは容易になされる．進めるに当って，1次元の場合の証明に従ってみよう．

まず，固有値は次で特徴付けられることを知る．

$$\Lambda_n = \underbrace{\inf \int_\Omega |\Delta u|^2 \Big/ \int_\Omega}_{\substack{\text{すべての}u\text{が}u_1,\cdots,u_{n-1}\text{に直交} \\ \partial\Omega\text{上}u = \partial u/\partial n = 0.}} |\operatorname{grad} u|^2,$$

$$\lambda_n = \underbrace{\inf \int_\Omega |\operatorname{grad} w|^2 \Big/ \int_\Omega}_{\substack{\text{すべての}w\text{が}w_1,\cdots,w_{n-1}\text{に直交} \\ \partial\Omega\text{上}w = 0.}} w^2.$$

これらの変分的特徴付けから直ちに，微分方程式にそれぞれuとwを乗じ，Ωについて積分し，Green等式を用いてわかる．

添字を落として，$u=u_1$および$w=w_1$でそれぞれ第一固有関数を表し，aを$v\perp w$となる様に選んで，試行関数

$$v = au_x + u$$

を考える．$u_x \perp w$あるいは$u \perp w$の特別な場合はもはや個別に扱われ得る．嚙み締め平板の固有関数は，それらの偏導関数がすべて消える性質をもつ．これの成り立つことは演習問題として残しておいて，$\partial\Omega$上で$v=0$がわかり，よって，次の不等式に到る．

$$\lambda_2 \leqq \frac{D(v)}{\int_\Omega v^2} = \frac{a^2 D(u_x) + D(u)}{a^2\int_\Omega (u_x)^2 + \int_\Omega u^2} \leqq \frac{D(u_x) + a^{-2}D(u)}{\int_\Omega (u_x)^2 + a^{-2}\int_\Omega u^2}.$$

発散定理と境界条件によって

$$D(u_x, u) = \int_\Omega (u_{xx}u_x + u_{xy}u_y) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((u_x)^2_x + (u_y)^2_x) = 0$$

であるから，前と同様，混合項は消える．

明らかに，bを$v\perp w$なるように選んだ第二の試行関数$v=bu_y+u$を考えると，aをbで，またu_xをu_yでおきかえて同様の不等式を得る．これらを加えて$^{*)}$，

$$\lambda_2 \leqq \frac{D(u_x) + D(u_y) + (a^{-2} + b^{-2})D(u)}{\int_\Omega ((u_x)^2 + (u_y)^2) + (a^{-2} + b^{-2})\int_\Omega u^2}$$

$$= \frac{\int_\Omega (\Delta u)^2 \Big/ D(u) + (a^{-2} + b^{-2})}{1 + (a^{-2} + b^{-2})\int_\Omega u^2 \Big/ D(u)} \leqq \Lambda_1.$$

ここで，最後の不等式において，この例題の初めに与えた不等式が用いられた．

演習問題

1. 上で与えたΛ_nとλ_nの変分的特徴付けを確かめよ．
2. 嚙み締め平板の固有関数が$\partial\Omega$上で消える勾配をもつことを確かめよ．正方形の嚙み締め平板に対して図を描け．
3. 最初嚙み締め固定棒，次いで嚙み締め平板に対して，$u_x\perp w$または$u\perp w$の特別な場合を考えよ．一般の場合に対して，形式$v=u_x+au$，$v=u_y+bu$の試行ベクト

*） $i=1, \cdots, m$に対して$\lambda \leqq \alpha_i/\beta_i$で，かつ$\beta_i$がすべて正であるとき，不等式$\lambda \leqq (\alpha_1+\cdots+\alpha_m)/(\beta_1+\cdots+\beta_m)$の成り立つことは，$\lambda\beta_i \leqq \alpha_i$を加えることにより直ちにわかる．

ルについて証明をかきかえよ．二つの問題の優先順位を論ぜよ．一般のn次元の場合についての証明を，$v_i = a_i u_{x_i} + u$，$v_i = u_{x_i} + b_i u$を用いて，または節1.1で示した総和規約を使えるならそれを用いて，証明せよ．

4．次の問題を例題と比較せよ

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} -\Delta^2 u = \Lambda \Delta u, \\ \partial\Omega \text{上} \quad u = 0, \\ \Omega \text{上} \quad \Delta u = 0. \end{cases}$$

この種の平板に対して図を描け．

5．Dirichlet-Poisson問題に対する安定性の限界を確立するために，先の節1.6.2で用いられた，$\partial\Omega$上で関数$\psi = 0$に対する不等式

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 \leqq k(\Omega) \int_{\Omega} (\Delta\psi)^2$$

を導け．**ヒント**：次のSteklov固有値問題を考えよ．

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} \Delta^2 \psi = 0, \\ \partial\Omega \text{上} \quad \psi = 0, \\ \partial\Omega \text{上} \quad \Delta\psi = \mu \partial\psi/\partial n. \end{cases}$$

安定係数kはμ_1に関係する．

丁度，発散定理と不等式を結びつけて使用することが偏微分方程式の研究で本質的な部分であったと同じく，収束の議論で不等式の利用もそうである．偏微分方程式に対する収束性に関する道具にもつ主要な関心は，変数分離解が実際に収束する事を知ることである．これの完全な議論は一般Fourier級数の収束性の知識に依存し，後の節1.9.6や第2章の数節まで留めておく．

一般のFourier級数展開の点別収束を提示する重要な道具は次の定理*)あるいはその変形である．

例題

Riemann-Lebesgueの補助定理によると，Fourier係数$c_N = (h, \varphi_N) = \int_a^b h(x)\varphi_N(x)\,dx$は$N \to \infty$のとき0に近づく．ただし，$\{\varphi_N\}$，$N = 1, 2, 3, \cdots$，は正規直交集合で，一様に有界である性質をもつとする．これはすべての可積分関数h，すなわち，$h \in L^1(a, b)$に対して示されるということは応用において重要である．

解答．次の仮説を思い出そう．区間(a, b)は有界と仮定して，

$$\{\phi_N\}_{N=1}^{\infty} \text{ は正規直交，すなわち，} \int_a^b \phi_N \phi_M \, dx = \begin{cases} 1, & N = M, \\ 0, & N \neq M. \end{cases}$$

*）積分論の二人の生みの親に対して命名された．

φ_Nは一様有界，すなわち，すべてのxとすべてのNに対して，

$$|\phi_N(x)| \leqq B < \infty,$$

$$h \in L^1(a, b), \text{すなわち}, \int_a^b |h(x)|\, dx < \infty.$$

すべてのLebesgue可積分関数$h \in L^1(a,\ b)$は，その値域截端値の極限であるという性質をもつ．この性質は特性関数*)の$L^1(a,\ b)$における極限として，その定義から容易にわかる．

すべての2乗可積分関数$h \in L^2(a,\ b)$は既に，そのFourier係数に対して，$N \to \infty$のとき$c_N \to 0$なる性質をもつ．この事の証明は演習問題として与えられる．

$N \to \infty$のとき$c_N \to 0$なることは，これら二つの事実から容易にわかる．$|h(x)|$が値Cを超えない$(a,\ b)$の部分集合の特性関数をχ_Cとする．すると，欲する結果は，$h\chi_C$が2乗可積分なることに注目して

$$\Bigl|\underbrace{\int_a^b h\phi_N\, dx}_{c_N} - \underbrace{\int_a^b h\chi_C\phi_N\, dx}_{\substack{\to 0 \\ (N \to \infty)}}\Bigr| \leqq \underbrace{B\int_a^b |h - h\chi_C|\, dx}_{\substack{\to 0 \\ (C \to \infty)}}$$

からわかる．

演習問題

6．$(a,\ b)$が有界区間のとき，$L^2(a,\ b) \subset L^1(a, b)$を示せ．

7．$h \in L^2(a,\ b)$および$L^2(a,\ b)$の任意の正規直交集合$\{\varphi_N\}_1^\infty$に対して，$N \to \infty$のとき$c_N = \int_a^b h\varphi_N dx \to 0$を示せ．

8．$\{\varphi_N\}$を$L^2(-\pi,\ \pi)$の古典的Fourier三角関数展開の関数$\sin Nx \cos Nx\ (N=1,\ 2,\ \cdots)$とするとき，Riemann-Lebesgueの補助定理の仮説が満たされていることを示せ．また，$L^2(-\pi,\ \pi)$で正規化されたとき，関数$\varphi_N(x) = \sin((N+1/2)x)$に対してそれを示せ．後者の列は，節1.9.6のDini収束判定法で度々用いられる．

この休止第2回の最後の例題と演習問題は，偏微分方程式の疑問を扱うとき，発散定理，不等式，Fourier級数と関連して有用な他の重要な技法の幾つかを解説する．

例題

任意の有界領域Ωの第一膜固有値λ_1に対して，常に正の下界λ_0が存在する．
この事実は時には，**Friedrichsの定理**あるいは**Poincaréの補題**と呼ばれる．n次元立方体を囲む様にして，それがどの様にして得られるかを示せ．

*）集合Sの特性関数χ_Sは，$x \in S$のとき$\chi_S(x)=1$，$x \notin S$のとき$\chi_S(x)=0$，の値をもつ．

解答. 問題が座標に依らないから，便宜上n次元立方体$(0,\ l)\times\cdots\times(0,\ l)$の中に$\Omega$をおく．$\partial\Omega$上で消える任意の許容される関数$u$に対して，$\Omega$の外側で$u=0$とおく．微積分学の基本定理とSchwarz不等式によって

$$u^2(x,\ .\ .\ .) = \left(\int_0^x u_x(s,\ .\ .\ .)\,ds\right)^2$$
$$\leqq \left(\int_0^x ds\right)\left(\int_0^x u_x^2(s,\ .\ .\ .)\,ds\right) \leqq l\int_0^l u_x^2(s,\ .\ .\ .)\,ds.$$

第一座標xについて積分して，

$$\int_0^l u^2(x,\ .\ .\ .)\,dx \leqq l^2\int_0^l u_x^2(x,\ .\ .\ .)\,dx.$$

残りの座標についても逐次積分して，

$$\int_0^l \cdots \int_0^l u^2 dx_1 \cdots dx_n \leqq l^2\int_0^l \cdots \int_0^l u_{x_1}^2 dx_1 \cdots dx_n$$
$$\leqq l^2\int_0^l \cdots \int_0^l (u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2)\,dx_1 \cdots dx_n.$$

よって，

$$\lambda_1 = \inf \frac{D(u)}{\int_\Omega u^2} \geqq \lambda_0 = l^{-2} > 0.$$

これは鋭くない限界の例である．1次元で$\Omega=(0,\ \pi)$に対しては，$\lambda_1=1$，$\lambda_0=\pi^{-1}$．正方形のΩに対し，$\lambda_1=2$であるが$\lambda_0=\pi^{-2}$で，この限界は次元数の増加に従って，段々悪くなる．存在証明に対して，たとえ結果が乏しかろうとも，その様な限界の存在でもって，しばしば成功させることができる．具体的な応用で，これらの限界の精密化が試みられる．

演習問題

9. (a) ギリシア人達は，与えられた周長のすべての平面曲線について，円が面積最大を与える等周不等式を知っていた．よって，任意のこの様な閉曲線に対して，囲まれた面積Aによる下限がある．すなわち

$$L^2 \geqq 4\pi A.$$

等号は円，すなわち$A=\pi r^2$かつ$L=2\pi r$のとき得られるから，この不等式は精密である．Fourier級数を用いてこの不等式を証明せよ．

(b) 次の型の不等式は，平面上の弧について考えると，しばしば有用なものである．平面上にパラメータ表示で与えられた任意の連続可微分な曲線$x(t)$，$y(t)$に

対して，不等式

$$\sqrt{\left(\int_a^b \dot{x}(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b \dot{y}(t)\,dt\right)^2} \leqq \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt$$

を証明せよ．

(c)上のFriedrichs下界を精密化せよ．また，囲んでいる球によってそれを導け．なぜ(b)が(a)で役立たないかを示せ．

1.7　幾つかの物理学的考察(および例題)

偏微分方程式は物理学的実在の認識を通して科学者によって生み出される．この様に，最も重要な偏微分方程式は，本来数学的量に帰せられるものであるけれども，物理学的考察に直接結びついている．

物理学を理解することは偏微分方程式を理解する手助けとなり，更に進んだ物理学の理解は偏微分方程式のよりよき理解のために，しばしば不可欠の要素ともなっている．数学の様々な数多い応用での多くの成功は，考察中の特殊な応用で錯そうしている要因の十分な理解を必要とし，最終的にもそれに基づいている．

本節では，偏微分方程式のこの方面の研究に簡単に触れていく．(1)三つの物理学的技法において，熱方程式を導き，考察するなかで，保存原理，線形化仮定，摂動法の利用を説明する．(2)三つの物理学的設定(および例題)で，連続体力学(および古典力学)，統計力学，量子力学から，数多くの重要な偏微分方程式を示して説明する．(3)未解決な問題において，基本的な物理学の問題を記述する偏微分方程式を含む多くの重要な疑問が未解決のままであることを簡単ではあるが明らかにしよう．

1.7.1.　3つの物理学的技法

物理学的問題を定式化し，解析するためには，いうまでもなく，多くの技法が用いれらてきた．それらの極く一部だけでも十分に駆使する資格をもつことは，生涯の有意な部分に相当する経験を必要とする．ここでは，偏微分方程式研究の枠内で，物理学的に触発された三つの重要な技法を導入したい．すなわち

保存原理(例えば，エネルギーの)

線形化仮定(例えば，方程式の)

摂動法(例えば，より単純な作用素の)

これらを，熱方程式に限定して，解説する．

しかしながら，保存原理は質量，運動量，その他多くの物理量の保存に適用されるべきことに注意しておく．また，線形化は，場の量子論の形式やその他において高位の非線形項を無視すること等々，様々なやり方でなされる．摂動は特異，正則のどちらもあるし，また線形か非線形であるかも知れない．さらに，領域Ωの摂動を考えることもある．これらの技法のいずれを使用するにせよ，何が必要かを確認す

るために物理学的応用に親しむ様にしておくことが望ましい．

熱方程式は通常次の様にして導かれる．熱平衡の方程式(熱は移送中のエネルギーである)は，エネルギーの保存原理を仮定して，形が

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon} U(x, y, z, t, u(x, y, z, t))\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} k(x, y, z, t, u(x, y, z, t)) \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \tag{1}$$

とかかれる．ここで，Ω_εは与えられた問題の物体Ω(領域)の任意の無限小部分(部分領域)(図1.7a)，Uは単位体積当たりのエネルギー*)，uは時刻tでの点(x，y，z)における温度，kは物体の物質に対する熱伝導係数である．方程式(1)は，Ω_ε内のエネルギーの時間的変化率がその境界$\partial\Omega_\varepsilon$を通過する正味のエネルギー束に等しいことを述べている．ここで，熱はΩ_εに流入するか，流出するか，またはそれらの両方のいずれかである．熱伝導係数kの単位は(cal)/(sec)(cm)(deg)である．よって，方程式(1)はΩ_εに出入りする1秒当たりのカロリー†)数の二つの等値性を特徴付けている．

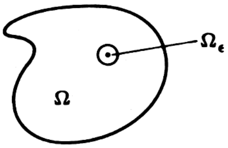


図1.7a

全エネルギー関数Uがその引数のすべてについてC^1級であると仮定すると，方程式(1)の左辺は積分記号のもとでの導関数としてかかれる．(1)の右辺にある熱の束は発散定理によって体積積分に変換可能である‡)．ただし，$\partial\Omega_\varepsilon$は十分に正則であって，かつ熱伝導係数$k$は少なくとも区分的に連続可微分であるとする．すると，(1)は

$$\int_{\Omega_\varepsilon} [U_t + U_u u_t - ((ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z)]\, dx\, dy\, dz = 0$$

となる．温度関数uをC^2級と仮定すると，被積分関数は連続であり，このとき微積分学によって，被積分関数は0でなければならない．なぜならそうでなければ，被積分関数がある点のまわりに十分に小さくとったΩ_ε上で0でないことになって，積分が消えることに矛盾するからである．よって偏微分方程式

$$\Omega \text{ 内で }\ U_t + U_u u_t - (ku_{,i})_{,i} = 0$$

*)　内部エネルギー関数uを仮定することは，断熱的(すなわち，“相互作用のない”)径路に沿って温度を変化させたとき，径路に依らないという熱力学の第一法則の前提にもとづく．この前提は支持はされているが，未だ完全に実験的に確かめられていない．

†)　1カロリーは，1気圧の下で1gの水の温度を，14.5°Cから15.5°Cまで上昇させるのに必要な熱の量である．

‡)　この事は実際，発散定理の物理学的記述，すなわち，表面の温度束は冷却中の物体から発散する熱量に相当するということである．同様な発散の解釈は流体力学その他でも見出される．

が得られる．これは便宜上，総和規約でかかれた*)．

物体の基本組成が時間的に変化しないと仮定すると，物体の内部エネルギー関数も時間的に不変であろうと考えることは，大変もっともらしく，よって方程式は

$$\Omega \text{内で} U_u u_t - (k u_{,i})_{,i} = 0$$

となる．

さて，U_uとkが定数であると仮定することにより，方程式に線形化仮定(2)を課そう．すると，(空間変数の単位を定数$k^{-1}U_u$によって正規化して）次の通常の線形熱方程式がもたらされる：

$$\Omega \text{内で} u_t - \Delta u = 0.$$

しかしながら，この点にこだわって†)，幾つかの事実で混乱させてみよう．懐疑的な読者は，冷たい風呂に身を沈めて，熱湯を注ぎ込んでみよ．線形方程式によると，熱の伝わる速さは無限に大きいことが予測される(問題1参照)．

熱伝導係数kはそこに含まれる不純物に大きく影響される．幾つかの応用(例えば，接触反応によって形成された金属)で，この事は非常に重要になるかも知れないけれども，扱われる物質は純粋でかつ等質であると仮定しよう．従って，kはΩ内の点(x, y, z)に依存しない．さらに，疲労因子，結晶形成における変化等々もないと仮定すると，kは時間にも依存しない．

U_uに対しても同じ仮定をする．ところで，U_uに対するこの様な仮定の内容をよりよく理解するために，ここで立止って次の注意を述べよう．すなわち，考えている系に外部から仕事が何もなされないとき，熱力学第一法則‡)

$$\Delta(\text{熱}) = \Delta(\text{エネルギー}) + \Delta(\text{仕事})$$

および，比熱の定義(ここでは単位質量当りでなく単位体積当りで)

$$\frac{\Delta(\text{熱})}{\Delta(\text{温度})} / \text{単位体積}$$

*)　そして，明らかに上の議論は，$n=3$の場合が物理学的に最も興味深いけれども，任意の次元でも成り立つ．

†)　これは教育的に見える．熱方程式は，大雑把にいってまた特に極端なあるいは臨界温度の範囲では，方程式の三つの基本型の中で“最も線形化に乏しい”ものである．

‡)　熱がエネルギーと仕事に関係するが，物質でないことを最初に理解していた一人はBenjamin Thompsonである．彼は後にBavariaのRumford伯になったアメリカ人で，1798年に大砲の穿孔作業から出る真鍮の残りかすの温度が高いことを，この系でなされた仕事に帰着させた．50年後のJouleの仕事まで，熱力学第一法則に対して，実験的確証を与える研究は何もなかった．

から，量U_uは問題にしている物質に対する比熱cの係数と見なされ得る．この様に，U_uに対する仮定は，比熱が一般には与えられた系の熱容量の測度であって，物体Ωに対し，時間的にも空間的にも依存しないということである．

物質の熱伝導や比熱に関するこれらの仮定のもとで，上で導いた(非線形)熱方程式は

$$\Omega \text{内で} \; u_t = \frac{1}{c(u)}(k(u)u_{,i})_{,i} \tag{2}$$

とかかれる．この方程式の非線形性の程度は熱伝導係数$k(u)$と比熱$c(u)$が温度uとともにどの様に変化するかということに依る．この依存性は長年にわたる実験によって，精度よく決定されており，図1.7b～eに要約して示す．

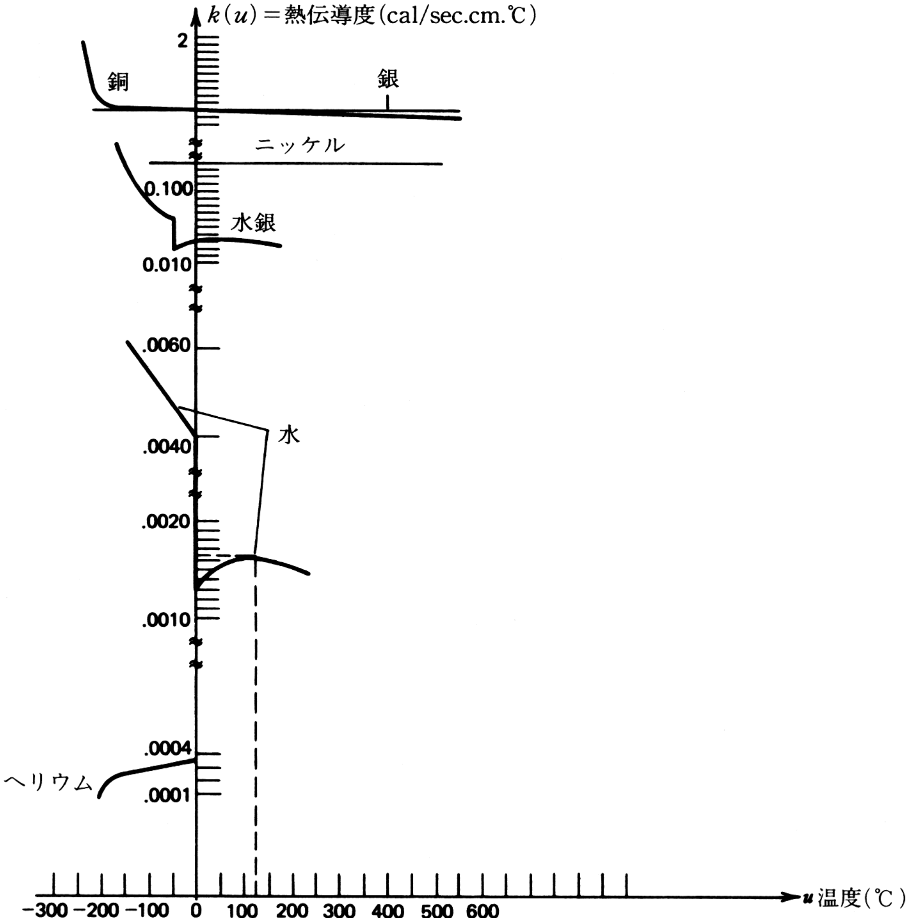


図1.7b　熱伝導度(目盛は異なる)

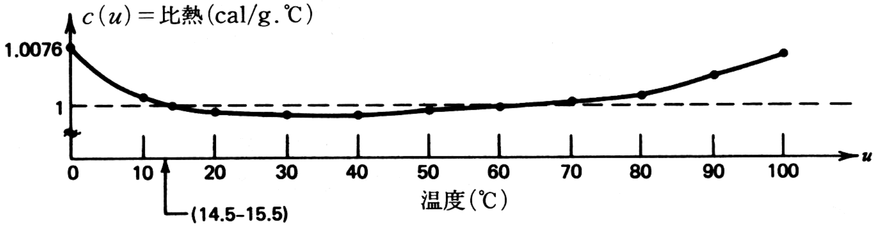


図 1.7*c*. 水の比熱

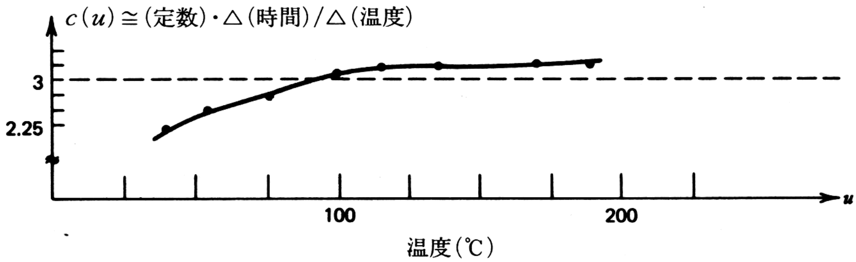


図 1.7*d*. カドミウムの比熱

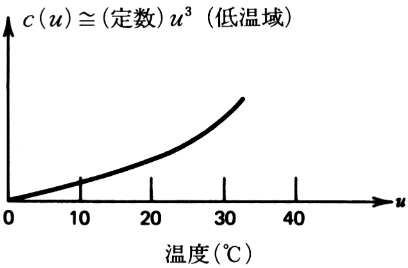


図 1.7*e*. 塩化ナトリウムの比熱

前に，例として挙げた浴槽の経験に戻って，熱の伝わり方は幾らか外向き球面発散波として表される様に見えるので，単位を度外視して，減衰波動方程式

$$u_t = u_{xx} - \varepsilon u_{tt}$$

を暗示させる*)．減衰項はu_tであり，非線形性(すなわち，kとcの温度依存)は恐らく(正の)定数εの中に含まれている．これはそれだけでも，この方程式における(3)摂動項εu_{tt}によって，熱伝導模型のこじつけられた線形化となっている．これは従ってまた，本節で示したかった三番目の技法(3)の解説にもなっている．非摂動方程式にお

*) これは実際，かなり最近になって物理学的により厳密な観点から導かれた．C.Catteneo,“Sur une forme de l’equation de la chaleur eliminant le paradoxe d’une propagation instantanée,” *Comptes Rendus Acad.Sci.Paris,* **247** (1958), 431-433.

けると同じ階数の導関数をもつこの様な摂動項は，広く**特異摂動**と呼ばれる．

摂動法(3)のより詳しい例は，次の問題3に示される．これは摂動法が自由奔放に用いられている量子力学の問題からとられた．

問題1．初期条件として，点x_0のまわりに局所化された正値単位の熱的衝撃をもつ線形熱方程式を考える．このとき，Poisson表現公式(節1.3問題2参照)を用いて，熱的衝撃が無限の速さで伝わることを示せ．

問題2．cal，℃，cm，secを用いて，熱方程式

$$cu_t - ku_{xx} = 0$$

で，単位の間に矛盾が生じないことを確かめよ．

問題3．水素原子の方程式の重要な性質(節1.6.2参照)は自己共役*)なことである．ラプラシアン項$H_0 \equiv -\frac{1}{2}\Delta$は$L^2(R^3)$で自己共役な作用素であり，一般の定理†)により，完全な水素作用素

$$H = -\tfrac{1}{2}\Delta - Z/r$$

に対しても，同様の結果が成り立つといえる．ただし，摂動$V \equiv -Z/r$が，uに依らないある定数aとbに対して

$$\|Vu\| \leqq a\|u\| + b\|H_0 u\|, \qquad b < 1$$

の意味で小さいことが仮定されている．好適なu(例えば，$u \in C_0^\infty(R^3)$)に対して，Schwarz不等式とSobolev不等式を用いて，これを示せ．

1.7.2．三つの物理学的設定(および例題)

先に物理学的設定における偏微分方程式を含む問題として，振動弦，張られた膜，熱伝導，原子について述べた．次の三つの一般的な物理学的設定に言及しよう．

連続体力学，
統計力学，
量子力学．

*）作用素Hは，$H=H^*$のとき，自己共役である．H^*の正確な意味に対しては，節1.9.7参照．この問題の要点は述べられた不等式を証明することによって，Hの自己共役をH_0のそれから導くことである．自己共役性の詳しい議論に対しては，問題1.9.7(1)を見よ．

†）F.Rellich,B.Sz.Nagy,T.Katoによる，次を見よ．T.Kato,*Perturbation Theory for Linear Operators*,2nd ed.(Springer,New York,1976)．

多くの偏微分方程式はこれらの三つのうちの一つから生ずる．

偏微分方程式の現れる設定をすべて網羅することは，興味のある仕事ではあるが，絶望的な試みである．その代わりに，この簡単な議論と幾つかの例を述べてみよう．

1．連続体力学(および古典力学)．多くの2階偏微分方程式は連続体力学(そしてより一般的には古典力学)において見出される．既に次の例が示されている．

熱方程式(放物型)，
振動弦(双曲型)，
たわんだ膜(楕円型)．

他に，幾つかあげると，

定常な渦無し非圧縮性流体の流れ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上}\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f. \end{cases}$$

ここで，uは速度ポテンシャル(すなわち，grad$u$の成分v_1, v_2, v_3が流体の速度成分である)．

静電気ポテンシャル．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta\varphi = -4\pi\rho, \\ \partial\Omega\text{上}\ \varphi = f. \end{cases}$$

ここで，φは静電気ポテンシャル(すなわち，gradφの成分E_1，E_2，E_3が電場強度の成分)，ρはΩにおける電荷密度．

座屈平板(弾性静力学)．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ -\Delta^2 u = \lambda\Delta u, \\ \partial\Omega\text{上}\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

ここで，uは板の垂直変位．境界条件は，座屈の起こるまで増加する縁荷重のもとで，噛み締め平板Ωに対して与えられたのもである．この4階作用素$\Delta^2 \equiv \Delta\Delta$は**重調和作用素**と呼ばれる．この様な4階作用素は弾性論に現れ，その扱い方は2階作用素に用いられた方法に似ている*)．

捩れ剛性(例えば，梁の)．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ -\Delta v = 2, \\ \partial\Omega\text{上}\ v = 0. \end{cases}$$

*）例えば，先の休止第2回に示されている．4階作用素はまた，流体動力学にも現れる．付録Cを見よ．

ここで，興味ある量は捩れ剛性$T=D(v,\ v)=\int_\Omega|\mathrm{grad}\,v|^2$で，これはひねりへの抵抗を測るものである．

静電容量．

$$\begin{cases} \Omega\text{の外部で}\ \Delta w = 0, \\ \partial\Omega\ \text{上}\qquad w = 1. \end{cases}$$

ここで，興味ある量は次に示す容量で，ポテンシャルを1単位引き上げるのに$\partial\Omega$上で必要な電荷に相当する．

$$C = D(w,\ w) = \int_{\Omega\text{の外部}} |\mathrm{grad}\ w|^2.$$

Navier-Stokes方程式(粘性非圧縮性流体の流れ)．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_i + u_j(u_i)_{,j} - \dfrac{1}{R}\Delta u_i = -p_{,i}\quad x \in \Omega,\ i = 1, 2, 3, \qquad t > 0, \\ (u_i)_{,i} = 0, x \in \Omega, \\ u_i(x, 0) = f_i(x), \qquad i = 1, 2, 3, \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ u_i(x, t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad t > 0. \end{cases}$$

ここで，便宜上総和規約が用いられた．$u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$は容器(有界3次元領域Ω)内の流体運動の速度成分である．この流体は時刻$t=0$で初速度$(f_1,\ f_2,\ f_3)$をもつ運動に入り，その後，第一式(Navier-Stokes方程式)に従う．第二式は運動が非圧縮であることを述べている．最後の(境界)条件は，境界に流体が付着しないことを述べる．

定常状態(時間依存のない)の問題を含む上記の例は楕円型である．同様に，多くの時間依存の発展問題は放物型の例となり，振動問題は双曲型方程式の例となる．

2.統計力学．　用語を厳格な意味でなく用いる．荒っぽくいって，2階方程式でなく多くの場合1階の積分微分方程式が見出される．数例を挙げよう．

線形Boltzmann方程式(輸送方程式)．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -v\ \mathrm{grad}_x n + \displaystyle\int_{R^3} k(x, v, v')n(x, v', t)\,dv' - \sigma(x, v)n, \qquad t > 0 \\ n(x, v, 0) = f(x, v). \end{cases}$$

ここで，$n=n(x,\ v,\ t)$は有界領域$\Omega\subset R^3$に対する粒子密度関数．$x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$．この6次元空間$(x,\ v)$は統計力学において，**μ-空間**とか**相空間**とかいわれる．有界領域は例えば，反応炉(中性子輸送問題)や星の内部(放射伝達問題)にみられる．この方程式は相互作用のない粒子雲の運動を記述する．右辺第一項は自由な運動を，第二項は運動量空間における他の領域からの散乱と他の粒子による生成に起因する$(x,\ v)$での入力を，また第三項は吸収や散乱に起因する損失を述べ

る. 積分作用素$\int k(x, v, v')\cdot dv'$は単独粒子に適用したとき, 生成される粒子数を表す.

Carleman系(気体運動論).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + a(u^2 - v^2) = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + a(v^2 - u^2) = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = v(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \geqq 0, & 0 < x < 1 \\ v(x, 0) = g(x) \geqq 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

ここで, aは正の定数. 未知関数$u(x, t)$と$v(x, t)$はいずれも気体を構成する二つの型の粒子密度であり, 方程式は単純化された連立Boltzmann方程式とみなされる.

非線形Debye-Hückel方程式(プラズマ).

$$\left\{ \Delta\varphi(x) = 2\lambda \left[1 - \frac{e^{-\varphi(x+1/2)}}{\int_\Omega e^{-\varphi(x)}\, dx} \right]. \right.$$

ここで, φはある種の周期的な境界条件をもつ. 深く立ち入らないが*), φはCoulomb系におけるジェリウム模型に対するポテンシャルである. ただし, 長距離秩序付けの存在に関してある種の仮定がとられ, 対応する場が矛盾の起こらない様に近似されている.

物理学的に重要なそして最近の定式化のうちで, 非常に多くの非線形方程式がある. その幾つかは節1.8で出会う. ここでは, 次の三つの興味ある性質を示すために, この特殊な方程式を含ませた. (a) $x+1/2$が空間の平行移動を表し, よってこの方程式は(進んだり, 戻ったり, 遅れたりの)移動引数をもつ方程式全体のクラスの一例である; (b) ODEとして, 多くの興味あるやり方で, それを扱うことができる(問題2を見よ); (c) PDEとして, 他の多くのものと同様に, 解くのは難しい.

3. 量子力学. やはり簡潔に述べよう. 未知関数$u(x, t)$は, xでの粒子を時刻tで見出す確率であるが, 時刻tに粒子のΩにある確率が

$$\int_\Omega |u(x, t)|^2\, dx, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

であるという意味でとられる. よって, 正規化$\int_{R^3} |u(x, t)|^2 dx = 1$が望まれる.

*) 次を見よ. P.Choquard, "Long-range ordering in one-component Coulomb systems," *Physical Reality and Mathematical Description*, Enz and Mehra (eds.), D.Reidel (1974) Dordrecht-Holland, 516-532.

Schrödinger方程式(単独自由粒子).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -i\Delta u, \qquad x \in R^3, \qquad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

ここで，単位は正規化された．iが存在するために，これは放物型でなく，解は熱方程式のそれに比べて幾らか異った振舞いをする．

Klein-Gordon方程式(相対論的自由粒子).

$$\left\{ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \lambda u, \qquad x \in R^3, \qquad \lambda > 0. \right.$$

ここで，λは，**de Broglie波**と呼ばれる固有関数uに対する物理学的に適当な正規境界条件のもとで，固有値の正の連続スペクトル*)に対応する．これは双曲型固有値問題である．

Dirac方程式(スピンをもつ相対論的自由粒子).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - imu_1, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} - imu_2, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - imu_3, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + imu_4. \end{cases}$$

この方程式は行列を用いてよりコンパクトな形でかくことができるが，ここでは正確な結びつきを示すために，上の形式で与えた．Dirac方程式は，4成分ベクトル$u=u(u_1, u_2, u_3, u_4)$に対する1階の方程式系である．ここで，$u=u(x, t)$，$x=(x_1, x_2, x_3)$，$-\infty<t<\infty$．Dirac方程式はKlein-Gordon方程式に関係しており，Schrödinger方程式を介して，幾つかの方法で数学的に調べられている．

ヘリウム原子方程式(非相対論的).

$$\left\{ -\tfrac{1}{2}\Delta_1 u - \tfrac{1}{2}\Delta_2 u - \dfrac{2u}{r_1} - \dfrac{2u}{r_2} + \dfrac{1}{r_{12}} u = \lambda u. \right.$$

ここで，$u=u(x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3')$，$\Delta_1$は$x$に対するラプラシアン，$\Delta_2$は$x'$に対するラプラシアン，$r_1=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$，$r_2=(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)^{1/2}$，$r_{12}=((x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2)^{1/2}$．境界条件を正規化することは$u$が2乗可積分なことであり，問題

*)　連続スペクトルの詳しい議論や正確な定義は節2.7でなされる．ここでの目的には，これは方程式が0から∞まですべての物理的に実現可能なエネルギー値の連続な範囲を表すことだけ指摘しておく．

が固有値問題であるから次の様にとる．

$$\int |u(x, x')|^2\, dx\, dx' = 1.$$

スペクトルは異なる固有値のより低いスペクトルに連続スペクトル$[-1, \infty)$を加えたものから成ることが知られている．

問題1．次の振動する周辺嚙み締め平板問題に対して

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} & \Delta^2 u = \mu u, \\ \partial\Omega \text{上} & u = 0, \\ \partial\Omega \text{上} & \partial u/\partial n = 0. \end{cases}$$

(a)固有値が正であることを示せ．(b)それらの正の下界を求めよ．

問題2．上述の非線形Debye-Hückel方程式は1次元の場合，次で与えられる．

$$u''(x) = 2\lambda \left[1 - \frac{e^{-u(x+1/2)}}{N(u)}\right], \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \qquad \lambda > 0.$$

ここで，$N(u) = \int_0^1 e^{-u(x)} dx$. 条件として，

周期性：　$$u(x) = u(x+1) = u(1-x), \qquad -\infty < x < \infty$$

および

正規性：　$$\int_0^1 u(x)\, dx = 1$$

を満たすとする．

(a)　$u(0) = 1$とおき，グラフを描き，その視察によって，適切な解を決定してみよ．

(b)　$v = u'$を代入し，次いで微分してv''を求めよ．その結果何が導かれるか，調べよ．

問題3．上に述べたヘリウム原子方程式に対して変数分離法を試みよ．

1.7.3.　幾つかの未解決問題

例えば，周辺嚙み締め平板問題における第一固有関数が常に領域全体で同符号であるのはどんな場合かは知られていない．必ずしも小さくないデータに対するNavier-Stokes方程式の初期値問題は，未だ完全に解かれていない．Boltzmann方程

式はある種の幾何領域に対してのみ解かれている．Debye-Hückel方程式の様な方程式はやっと研究され始めた所である．ヘリウム固有値問題の非可解性は量子力学における積年の問題であったが，その非可解性はリチウムやそれより複雑な原子に対するSchrödinger方程式の必然的な非可解性の因をなしている．

ここで議論されずじまいの他の多くの重要な偏微分方程式が未解決のまゝ残されている．

問題1．平板の幾何学あるいはトポロジーの違いによって，その周辺嚙み締め平板に対する第一固有値の符号が変わることがあるだろうか？

問題2．Navier-Stokes方程式の初期値問題に対する主要な疑問(1)，(2)，(3)，(1′)，(2′)，(3′)のうち解けないのはどれか？

問題3．ヘリウム方程式を解くには苦労すると直観的に予想されるのは何故か？

1.7　演習問題

1.関数u，vをR^3のある有界な部分領域Ωの外側で消える十分に滑らかな関数とする．このu，vに対して，ラプラシアンの項$H_0\equiv\frac{1}{2}\Delta$が，

$$\int_{R^3}(H_0u(x))v(x)\,dz=\int_{R^3}u(x)(H_0v(x))dx$$

の意味で，“形式的に自己共役”であることを示せ．

2.Ωを長方形の平板とする．次の平板固有値問題は厳密に解けることを示せ．

$$\begin{cases}\Omega\text{ 内で }-\Delta^2u=\Lambda\Delta u,\\ \partial\Omega\text{ 上 }u=0,\\ \partial\Omega\text{ 上 }\Delta u=0.\end{cases}$$

3.他の周辺嚙み締め平板問題で，変数分離法が実行できるか？

1.8　分岐理論入門

“分岐”という言葉は“分裂”を意味し，非線形微分方程式の枠内で，ある臨界的な(例えば，物理的な)パラメータλで方程式の解の個数が変化することを含んでいる．このλの臨界値はしばしば**分岐点***)と呼ばれる．

この微分方程式の解の個数が変わるという概念は，それ自体として，新しいものではない．基礎的な固有値問題

$$\begin{cases}-u''(x)=\lambda u(x), & 0<x<\pi,\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$$

を思い出そう．解は固有値$\lambda_n=n^2\,(n=1,2,3,\cdots)$で固有関数$u_n(x)=c_n\sin nx$であった．ここで$c_n$は任意定数．固有値パラメータ$\lambda$を横軸に，解のノルム†)を縦軸にとっ

*)　もっと適切な術語は，分裂が任意個の新しい解を生ぜしめるので，“派生点”であろう．

てプロットすると，解のダイヤグラムが得られる(図1.8a)．他のすべてのλの値に対して，解は唯一つ，自明解u=0のみで，これはそこから他のすべての解を派生させる分枝としてのみ興味がある．分岐問題，特に連続体力学においては，通常，実数値の解だけを扱い，ときには正値解と負値解の区別が必要となる(例えば，物理学的に考えて，棒の座屈における上反りと下反り)．上の例では，縦軸を$\|u_n\|$でなくc_n，すなわち，解の“符号付きの大きさ”をとることによって達成される．その結果得られるダイヤグラムを図1.8bに示す．

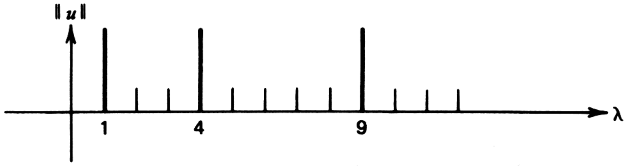


図 1.8a

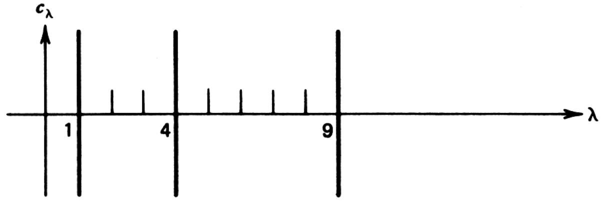


図 1.8b

図1.8aや図1.8bは，線形の問題であるけれども，非線形問題に対する**分岐ダイヤグラム**と呼ばれるものの一例である．固有値λ_nが分岐点である．λ_nの各値で，解の個数は一つ(自明解)から無限個へと変わる．

一般に，そしてすぐわかる様に，問題の非線形性の効果は解の分枝を曲げることである．その現れ方をみるために簡単な例を考えよう．

先ず，ゆるやかな非線形問題‡)

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\|u\|^2 u(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

†)　このダイヤグラムで，L^2ノルム$\|u\| = (\int_0^\pi u^2)^{\frac{1}{2}}$を用いるか，最大値ノルム$\|u\| = \max_{0\le x\le\pi}|u(x)|$を用いるかは，縦軸のスケールを変えるだけで，どちらでもよい．特に断らない限り，$\|u\|$としてL^2ノルムを用いる．

‡)　この型の非線形性は“スケーリングし直し”のみからなっており，その意味で，純粋な非線形性ではない．それにもかゝわらず，二,三の物理学の問題に現われ，文献にしばしば扱われる．純粋に非線形なるものは，u^2とかもっと一般に$f(u)u$の様なものである．ここで，$f(u)$はベクトルuを空間の新しい方向に実際に“向け直す”ベクトルである．ゆるやかな非線形性は$\|u\|^2u$の様なもので，擬非線形とでも呼ばれ得よう．

を考えよう．前と同様，自明解$u=0$はすべてのλに対する解の分枝である．任意の非自明解uに対して，量$\lambda\|u\|^2$にλと同符号をもつ定数があるので，上の線形問題と同様，境界条件によって，$u_n(x)=c_n\sin nx$を解の候補にとれる．これを方程式に代入すると，解分枝$\lambda\|u\|^2=n^2$が得られる．あるいは係数振幅を用いて

$$c_n = \pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{n}{\lambda^{1/2}}.$$

よって，この問題に対する分岐ダイヤグラムは図1.8cである．この例における唯一の“分岐点”は$\lambda=\infty$にある．

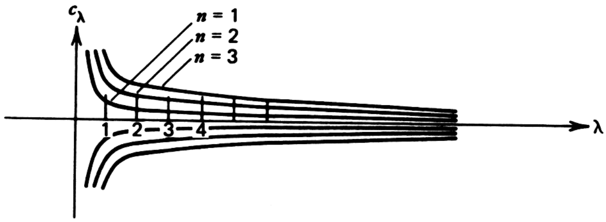


図 1.8c

線形の例によく似ている非線形の例を得るために，非線形項を入れて

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) + \|u\|^2 u(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

を考えよう．$u(x)$が解であれば，$-u(x)$も解である．よって，先と同様に分岐ダイヤグラムは，水平λ軸について対称に現れる解分枝をもつと期待される．また全く同様にして，境界条件から，解の候補は$u_n(x)=c_n\sin nx$．方程式に代入すると，関係式$\lambda+\|u\|^2=n^2$ を得る．この様にして解分枝は

$$c_n = \pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(n^2-\lambda)^{1/2}.$$

分岐ダイヤグラム(図1.8d)は分岐点$\lambda_n=n^2$(n=1，2，3，…)から始まる分枝である．これらの点はもとの線形固有値問題の固有値である．非線形性を$\|u\|^2u$から$-\|u\|^2u$へと変えると，その分枝は

$$c_n = \pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(n^2+\lambda)^{1/2}$$

に，また分岐ダイヤグラムは図1.8eとなる．図1.8dと図1.8eにみられる二つのダイヤグラムは，非常に多くの非線形問題で見られるものの全く典型的なものである．

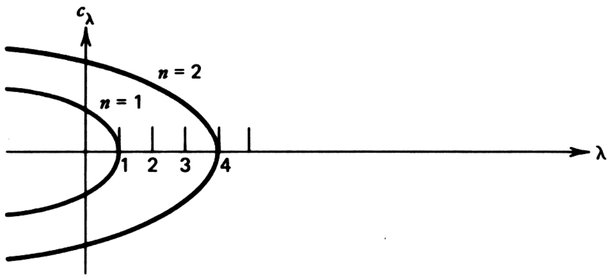


図 1.8d

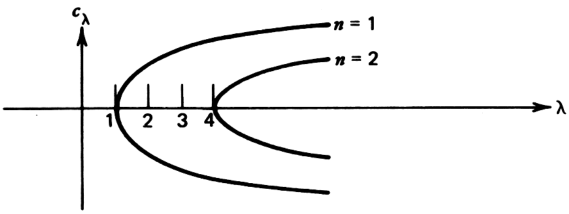


図 1.8e

さて，この様な問題の現れる物理学上の設定に関する考察へ戻ろう．すなわち，(a)棒尺の座屈，(b)回転弦，(c)反応速度論．

(a)棒尺の座屈

壁に棒尺を押しつけたとしよう．そのときの物理的状況は図1.8fに示される．これに対するモデル方程式は

$$\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda \sin \varphi(x), & 0 < x < l, \\ \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0 \end{cases}$$

であることを示すことができる．

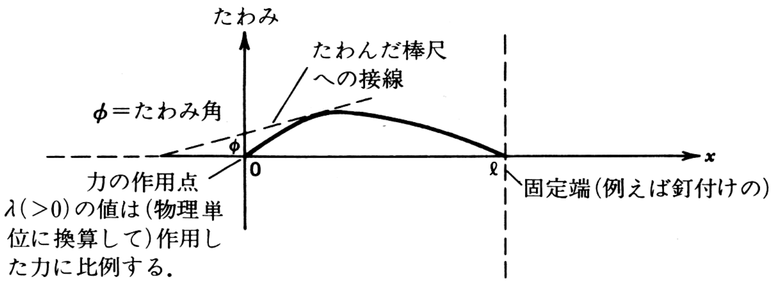


図 1.8f

たわみ角φの極大値は両端で現れるだろうと期待される．$\varphi(0)=\varphi_0$を，与えられた各力$\lambda\geqq 0$に対する極大値とする．このモデル方程式は常微分方程式の手法で解けて(問題1参照)，その分岐ダイヤグラムは図1.8gで示される．第一の分枝は図1.8fで描かれた座屈モードに，第二分枝は第二座屈モード(図1.8h)に，等々それぞれ対応する．高次モードに実際到達し得るかどうかは，棒尺のたわみ性に依存する(現実には破損する)だろう．

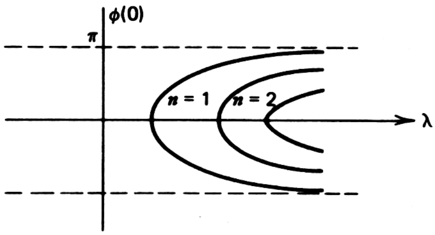


図 1.8g

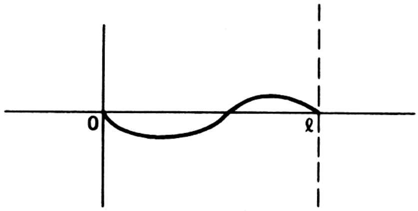


図 1.8h

(b)　回転弦

長さlの弦の上端を握って，できるだけ速く回転させると，その形は変わると想定される．弦は十分にしなやかで，それに働く力は鉛直下方に引張られる重力と一定の角速度による遠心力だけであるとする．このとき，弦は時空における非線形偏微分波動方程式を満たす．簡単のため，鉛直軸のまわりに一定角速度で回転させるとき，その形状を変えない様な弦を表す解を探すことだけ試みよう*)．このとき，次の非線形常微分方程式に到る．

$$\begin{cases} -u''(s) = \lambda(u^2(s) + s^2)^{-1/2}\, u(s), & 0 < s < l, \\ u(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$$

ここで，sは自由端から測られた弦に沿っての弧長であり，微分演算はsに関してとられる．固有値パラメータλは角回転速度(の2乗値)を(一定の)重力で割った量である．未知関数$u(s)$は(物理定数倍のスケールを法として)，図1.8iに示される様な鉛直軸からの水平距離rを弧長で微分した導関数である．

*)　これは要するに，問題から時間および考えられ得る空間的非対称性の両方を消去して，非線形変数分離を行ったことになる．

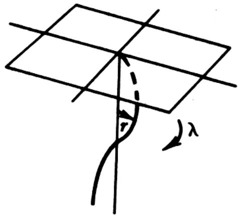


図 1.8i

このようにして，上で与えた方程式に対する境界条件は，底端で$r'(0)=0$を意味し，以前の数節で考えた線形振動弦問題の自由端の条件と同じく，弦は鉛直軸に平行である．頂点で，$r''(l)=0$. よって，弦は頂点で直線状にみえる．

ここでは，この問題を陽的に解くことはしない*). 自明解は$u(s)=r'(s)=0$, すなわち，弦は鉛直軸のまわりに回転しながらも，重力により鉛直下方に垂れ下がっている場合であることに注意しよう．角速度の重力に対する比λが適当に大きな値(あとでわかる様に，線形化された方程式の第一固有値．問題2参照)にまで増加するとき，弦は自明なモードから離れて，図1.8iで描かれたモードを示す様に見える．もっと複雑なモードでは，遠心力が勢いを増して重力を超える様になる．

(c) 反応速度論

反応速度論†)において，適当な初期値や境界値をもつ方程式

$$\begin{cases} (C_i)_t = k_i \Delta C_i + f_i(C_j, T) \\ T_t = k\Delta T + f(C_j, T) \end{cases}$$

の様な種々の薬剤間の化学反応を支配する偏微分方程式系がある．C_jは濃度，Tは適当な単位で測った温度である．燃焼の理論では，問題にしている短時間の間で濃度が変化しないとする仮定のもとで現れる特別の場合には，単独非線形放物型方程式

$$T_t = k\Delta T + q_0 C_0 e^{-a_0/T}$$

になる．ここで，q_0は反応熱，a_0は気体エネルギー定数で既知，C_0は初期濃度，$u(x, t)$は通常の記号法に従い温度$T(x, t)$を表すとし，$\lambda=k^{-1}q_0C_0$を固有値パラメータとみなすと，境界上で一定温度u_0を保持する定常状態の平衡温度$u(x)$に対して，次の方程式を考えることができる．

*） 次を見よ．I.Kolodner,"Heavy rotating string," *Comm.Pure Appl.Math.*8(1955)，395-408.

†） 例えば，次の参考書を見よ．G.R.Gavalas, *Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems* (Springer,New York,1968), G.N.Nicolis, and I.Prigogine, *Self-organization in Nonequilibrium Systems:From Dissipative Structures to Order Through Fluctuations* (Wiley,New York,1977)〔訳者注：散逸構造-自己秩序形成の物理学的基礎-(小島陽之助，相沢洋二訳)岩波書店，1980〕.

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta u = \lambda e^{-a_0/u}, \\ \partial\Omega\text{上} \quad u = u_0 . \end{cases}$$

物理的理由によって，$\lambda \geqq 0$の場合のみを考える．視覚化に便ならしめるため，Ωを2次元単位円板にとる．このとき，解に対する分岐ダイヤグラムは図1.8jに示される形をとることがわかる．この様な方程式はいろいろな非線形熱源問題に現れるけれども，次の解釈は興味あるものの一つである．単位円板を固体燃料ロケットの断面，u_0を外側での一定燃焼温度，λをその断面における推進燃料の濃度とする場合である．より高濃度のλによって，より高い中心燃焼温度$u(0)$が生成される．臨界濃度λ_1，λ_2の間には，三つの中心燃焼温度が可能である．確かに応用では，最も高い温度に到達させることが望ましい．

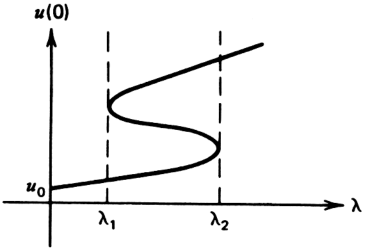


図 1.8j

この三番目の型の問題をもっと受け入れ易く述べるために，常微分方程式

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda e^{u(x)}, & -1 < x < 1, \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

を考えよう．例えば，この型のモデル方程式はポリトロープ型星の重力平衡理論に現れる．この特殊な方程式は厳密に積分でき(問題3参照)，その分岐ダイヤグラムは図1.8kに示される．

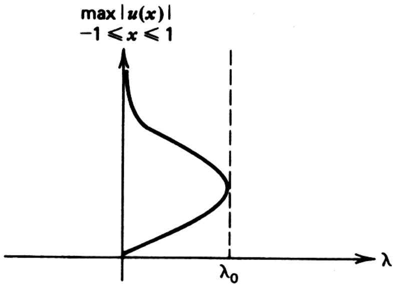


図 1.8k

上に与えた三つの物理学の例題に対して，モデル方程式は最終的に常微分方程式として定式化されて，帰着された形の解を見易すくした．このとき，第一の例は関連した初期値問題によって解かれた(問題1参照)．第二のものも同じ方法で解かれた．第二と第三の例はいずれも，非線形問題で度々有効性を発揮するもう一つの方法で解くことができ，その方法をここでは第三の問題を例にとって述べよう．その方法には幾つかの名称が付けられている．Hammerstein積分方程式の方法，単調逐次代入法，順序Banach空間における正値錐体の理論の応用など．これは，Dirichlet境界条件をもつ微分作用素$Lu=-u''$の逆作用素L^{-1}が正でかつコンパクトであるという事実に強く依存する．これらの条件は強いものであるが，有界領域上の楕円型作用素に対しては，しばしばうまくいく．これらの点の幾つかについては，第2章でよりくわしく論ぜられる．この方法はまた，数値的近似の手法を受け容れやすい性質をもつ．

さて，この最後の非線形項e^uをもつ問題を引例として考えるならば，Green関数法を用いて，問題を次の積分方程式にかき改めよう．

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} G(x, s)e^{u(s)}\, ds.$$

ここで，$G(x, s)$はDirichlet境界条件をもつ作用素$Lu=-u''$に対するGreen関数である．容易にわかる様に，

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+s)(1-x), & s \leqq x, \\ \frac{1}{2}(1-s)(1+x), & s \geqq x. \end{cases}$$

“**上限解**”$v(x) \geqq \lambda \int G(x,s)\, e^{v(s)} ds$と“**下限解**”$w(x) \leqq \lambda \int G(x,s)\, e^{w(s)} ds$の両方の存在が示されるならば，そのとき解は存在することが知られている*)．更に，その解は次で与えられる反復関数$\{u_n(x)\}$の極限である．

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_{-1}^{1} G(x, s)e^{u_n(s)}\, ds\ .$$

ここで，繰り返しを始めるための初期近似点u_0は上限解か下限解のいずれかにとられる．実用上は通常下限解がとられる．

特に，任意の$\lambda \geqq 0$に対する問題の下限解として容易に認められる様に

$$u_0(x) \equiv 0$$

にとろう．すると，

*) 例えば次を見よ．H.Amann,“Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces,” *SIAM Review* 18(1976), 620-709.

$$u_1(x) = \tfrac{1}{2}\lambda(1 - x^2),$$

$$u_2(x) = 1 - e^{(1/2)\lambda(1-x^2)} + \tfrac{1}{2}\lambda e^{(1/2)\lambda}\left[\int_{-1}^{1} e^{-(1/2)\lambda s^2}ds + x\left(-\int_{-1}^{x} e^{-(1/2)\lambda s^2}ds + \int_{x}^{1} e^{-(1/2)\lambda s^2}ds\right)\right].$$

$$\vdots$$

これ以上の繰り返しを考えることは，数学と論理学の両面の演習問題として読者にまかせる(問題3参照).

本節を閉じるに当って，第二次分岐と乱流の概念を簡潔に論じておく.

最初のあるいは第一次分岐は通常，自明解(または定数解)$u\equiv 0$から非自明解へ分裂するとき現れる．上の例はこの場合である．次いで，非自明解の分枝が更に分岐するかも知れない．それは**第二次分岐**と呼ばれる．分岐ダイヤグラム上では，この第二次分岐は図1.8lの様に現れる.

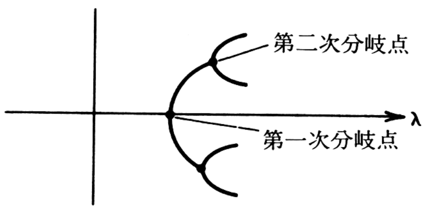


図1.8l

流体力学のある種の問題で，実験によって数多くの第二次分岐が明らかにされた．それらは外見上分岐数が増加する様な階層に配列されている．この事は有名な**Landau予想**(乱流状態は次第に増加する複雑な分岐の無限に連なる鎖の最終結果と見なされる)へと導く．他方，乱流は僅か数個の第二次分岐だけで現れるとする確かな証拠もある．この様に，多くの重要な物理学への応用において，乱流の性質を理解することは未だ不明確のままである*).

問題1(a)　棒尺の座屈問題を，次の対応する初期値問題を考えることによって解け.

$$\begin{cases}\varphi''(x) + \lambda \sin\varphi(x) = 0, & x > 0,\\ \varphi(0) = \varphi_0, & \\ \varphi'(0) = 0. & \end{cases}$$

ここで，$\lambda>0, 0<\varphi_0<\pi$．これは$\varphi'(l)=0$を満たす解のみを認める.

(b)その解の成り立つ範囲を，陽的にあるいは単に陰的に与えて決定せよ.

*)　乱流に関して幾つかの進んだ議論については，付録Cを見よ.

(c)この問題に対する分岐ダイヤグラムを，本節で示された様にして(図1.8g)描け.

問題2 より高位の項を落して，非線形方程式は"**線形化**"される*). このとき，分岐理論におけるかなり一般的な定理および"汎定理"†)は，非線形方程式の解分枝が線形化された方程式の固有値から派生すると主張する. (a)上で考えた6個の例に対して，線形化を見出せ. (b)すべての分枝が上述の主張に従って，いかにうまく派生するかを研究せよ.

問題3(a) 上で与えた二つの非線形温度源問題は$\lambda<0$に対して正値解を持たない場合を論ぜよ. (b)次の非線形境界値問題を厳密に積分せよ.

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda e^{u(x)}, & -1 < x < 1, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

ヒント：変数を変換せよ. (c)本文中で行った様な(b)の問題の繰返しを，解析的にあるいは計算機を用いて，研究せよ.

1.9 補足的議論および問題

本節は八つの小節—問題1.9.1～1.9.8—からなり，それぞれ，これまでの本文と同じ番号をもつ節を補足する題材と演習問題をもつ内容となっている. 次いで最終小節，問題1.9.9において三つの"確認"のための演習問題とより深く提起された演習問題と問題がおかれる.

問題1.9.1は，節1.1で議論されたと同様に偏微分方程式の分類に対しての幾つか進んだ内容を含む. この主題の入門段階では，それらの分類の細部に関して多くの時間を費やすべきでないと考えている. 同様に，とり上げた補足的題材の大部分について，それらの素材をどう処理するかは教授者の判断や読者の関心にゆだねられている. 例えば，問題1.9.2では，特性解を最小限に取扱った. その主題は一方で，特に一般の双曲型偏微分作用素の振舞い，混合型方程式の解および非線形問題に関係して，詳細に研究されている.

*) この様な方程式の線形化を記述するには，他にももっと厳密な方法があるが，このやり方は実用上よく用いられる. ここでは，"零のまわりの線形化"すなわち，"uの零解のまわりの線形化"について考えた. この発想は，微小解に対して，高位の項がより小さくそして副次的な効果しかもたないことである.

†) この重要な主題に関するぼう大かつ急増する文献に対して，次が参考になる. I.Stakgold, Branching of solutions of nonlinear equations, *SIAM Reviews* **13** (1971), 289-332；M.M.Vainberg and V.A.Trenogin, *Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations* (Noordhoff, Leyden, 1974)；D.D.Joseph, *Stability of Fluid Motions* **I** (Springer, Berlin, 1976). この主題に関する重要な研究は多すぎて，ここで完全な文献を載せることはできない. もっと最近の処理法については，次を見られたい. M.Golubitsky and D.G.Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* **I** (Springer, New York, 1984).

問題1.9.3は楕円型および放物型の方程式に対する最大値原理の証明を略述する．初期値問題に対する基礎的なPicard-Cauchy-Kowalewskiの存在定理が問題1.9.4に与えられる．

問題1.9.5は，ある程度まで節1.5の三つの部分を議論するが，また全体としてこの主題に対して背景となっている題材を補充している．本書では，変数分離法をかなり十分に展開しているので，問題1.9.5(1)は読者に対して歴史的な眺望を活性化すべく選ばれた．問題1.9.5(2)は明らかに要約的やり方で，病的な領域の疑問について注意深い扱いが試みられる．問題1.9.5(3)で，その変分的定式化から偏微分方程式が導かれる．問題1.9.5の一部，特に(2)と(3)には，節1.6，特に1.6.1(1)の知識が必要である．

問題1.9.5の配列にまねて，問題1.9.6は三つの部分から成る．(1)Fourier級数の点別収束に関する数学的な発展についての簡単な歴史;(2)Dini判定の証明とGibbs効果への簡潔な入門;(3)Lebesgue優収束定理の大変簡潔な議論．Lebesgue理論の細かな点まで踏み込むつもりはないが，優収束定理がここでは“積分記号下で微分すること”に対する基本的技法として主張される価値がある様にみえる．実際，問題1.9.7(3)の範囲内で，熱方程式がその初期値をとる道筋を厳密に研究説明するとき，それが用いられる．問題1.9.7の初めの二つの部分は(1)自己共役作用素の簡潔な解説と，(2)超関数的（または弱い）導関数に関連した概念である．作用素の自己共役性は物理学への応用では重要な概念である．

問題1.9.8はVan der Pol方程式を介して，非線形常微分方程式を解析するための相図法をごく簡潔に説明する．これは非線形問題を2階常微分方程式へ帰着させた特殊の場合に見過してはいけない重要な方法であること，および摂動や分岐の理論で重要な方法として見られるべきであることの観点がここにある．

問題　1.9.1　分類

2階偏微分方程式に対する分類手続きに関して，次の約束と事実の幾つかを学ぼう．また，この点に関して動きがとれなくならない様に述べてから，その問題に後で立ち戻ることにしたい．特殊な演習問題が議論の終り近くに用意される．

点$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$n>1$，の領域Ω上で，n個の変数と1個の未知関数による2階偏微分方程式を考えよう．すなわち，

$$F(x_i,\ u,\ u_{,i},\ u_{,ij})\ =\ 0.$$

その一つは

$$Lu\ =\ Au\ +\ N(u)\ =\ 0$$

である．ここで，$Au=a^{ij}u_{,ij}$は2階の部分で，他の項から分離され得る*)ものとする．この方程式は，$a^{ij}=a^{ij}(x_i,u,u_{,i})$，$N(u)=N(x_i,u,u_{,i})$のとき，すなわち，方程式に現れるどんな非線形項も$u$の2階偏導関数を含まないとき，**準**（または**仮**）**線形**と呼ばれる．方程式が**ほとんど線形**または**半線形**と呼ばれるのは，$a^{ij}=a^{ij}(x_i)$，$N(u)=N(x_i,u,u_{,i})$，すなわち，2階の項が線形なときである．線形方程式は，$a^{ij}=a^{ij}(x_i)$，$N(u)=$

$a_i u_{,i} + au + f$と表される．ここで，$a_i = a_i(x)$, $a = a(x)$, $f = f(x)$．この場合，Lは定数でない係数もとり得る線形表現である．$f(x)$は一般に**“データ”**と呼ばれ，係数とともに既知とみなされる．

例

$(u_{x_1x_1})^2 + (u_{x_2x_2})^2$ は準線形でない．
$(u_{x_1})^2 u_{x_1x_1} + (u_{x_2})^2 u_{x_2x_2} + u^2$ は準線形，
$x_1 u_{x_1x_1} + x_2 u_{x_2x_2} + u^2$ は半線形，
$x_1 u_{x_1x_1} + x_2 u_{x_2x_2} + x_1 x_2 u$ は線形，
$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u$ は定数係数をもつ線形．

通常，定数係数の線形偏微分方程式の場合を考えている．次の小節では主に$n=2$の場合を考えるが，$n>2$でも同様に分類される．分類は最高階（ここでは2階）の導関数項だけに依存し，よって，より低階の項は無視される．

着目点は全く単純である．

$$Au = a^{ij} u_{,ij}$$

が与えられたとする．任意のn次元ベクトル$y = (y_1, \cdots, y_n)$を考え，2次形式

$$Q_1(y) = a^{ij} y_i y_j = (Ay, y) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^{ij} y_i y_j$$

を作る．2回連続可微分関数uに対しては，$u_{,ij} = u_{,ji}$であるから，$a^{ij} = a^{ji}$が仮定され，よって行列$A = [a^{ij}]$は$n \times n$対称行列である．線形代数学によれば，$y = (y_1, \cdots, y_n)$から$z = (z_1, \cdots, z_n)$へ変数変換して，$Q_1(y)$は主軸形式へ変換され得る．ここで，z_iは適当な基底で，これにより

$$Q_2(z) = k_i (z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i (z_i)^2$$

の標準形式にかかれる．k_iの正，負，零の個数は，任意の（非特異な）線形変数変換$(y_1, \cdots, y_n) \to (z_1, \cdots, z_n)$のもとで不変であり，よって作用素を分類するのに用いられ

*）ここで，上述の形式

$$Lu = (a^{ij} u_{,i})_{,j} + \text{低階項}$$

ではなく，いわゆる発散形式

$$Lu = a^{ij} u_{,ij} + \text{低階項}$$

で方程式を表す方が，ときには都合のよいことがある．分類に際して，前者が用いられる．後者は部分積分法や一意性の証明の様なものに便利であり，一般によりよい性質をもち，j番目変数によって微分して前者に変換される．

る．たとえば，すべてのk_iが同符号をもつとき，偏微分方程式は楕円型であり，一つを除く他のすべてが同符号のとき，それは双曲型である．

上の分類は，$n=2$の場合に，その初等幾何学から標準錐体断面の名称：楕円，放物線，双曲線に由来する．また，すぐ上で行った設定に見られる様な判定法がある(節1.1をも参照)．$n=2$として，2階偏微分作用素

$$Au = a^{ij}u_{,ij} = a^{11}u_{,11} + a^{12}u_{,12} + a^{21}u_{,21} + a^{22}u_{,22}$$
$$\equiv a^{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a^{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a^{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

を考える．ここで，$a^{12}=a^{21}$すなわち混合偏導関数の係数は初めから等しいと仮定されている．

次の線形基底変換を指定しよう*)．

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{12}/a^{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

すると(完全平方形式で)

$$Q_1(y) = a^{11}y_1y_1 + a^{12}y_1y_2 + a^{21}y_2y_1 + a^{22}y_2y_2$$
$$= a^{11}\left[\left(y_1 + \frac{a^{12}}{a^{11}}y_2\right)^2 + \frac{a^{11}a^{22} - (a^{12})^2}{(a^{11})^2}y_2^2\right]$$
$$= a^{11}(z_1)^2 + \frac{a^{11}a^{22} - (a^{12})^2}{(a^{11})}(z_2)^2 = Q_2(z).$$

分類．$d=a^{11}a^{22}-(a^{12})^2$は**判別式**と呼ばれる．すると(定義)：

$$d > 0 \Leftrightarrow Au \text{ は楕円型}$$
$$d < 0 \Leftrightarrow Au \text{ は双曲型}$$
$$d = 0 \Leftrightarrow Au \text{ は放物型}$$

これは，上述のk_iの符号性の議論と同じである．解析幾何学において，対応する標準形は

$$k_1(z_1)^2 + k_2(z_2)^2 = 1$$

であり，楕円，双曲線，(退化)放物線の三つの場合は，それぞれ，$k_2>0$，$k_2<0$，$k_2=0$に依存する．ここで，$k_1>0$とした．

しかし，未だ次を示すことが残されている．すなわち，上の分類が，適当な変数変換に従って，与えられた偏微分作用素Auをその標準形

*）$a^{11}=0$のときはそれに代えてa^{22}を用いよ．$a^{11}=a^{22}=0$のとき，方程式は双曲型で，これは双曲線$y_1y_2=1$に対する錐体断面のもう一つの標準形に相当する．$y_1y_2=1$は(簡単な)変数変換によって，双曲線の通常の標準形$z_1{}^2-z_2{}^2=1$に帰着される．

楕円型	**Laplace作用素**	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$
双曲型	**d'Alembert作用素**	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$
放物型	**拡散作用素**	$\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$

のうちの一つへ変換することに対応し，そしてそうなることを示さなければならない．これは次の様にして確かめられる．与えられた定数係数の微分表示

$$Au = a^{11}u_{x_1x_1} + 2a^{12}u_{x_1x_2} + a^{22}u_{x_2x_2} + (\text{低階の項})$$

に対して，Aを上の三つの標準形式の一つに変換する様な線形の変数変換

$$\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \text{すなわち},\ \boldsymbol{\zeta} = C\mathbf{x}$$

を求めよう(変数係数の場合, 1対1であるが必ずしも線形でない変数変換を探して定数係数の場合と同様に扱えるが，多少の注意が陰関数定理を介して要請される)．微積分学の連鎖規則(合成関数の微分法)によって，

$$u_{x_1} = u_{\zeta_1}(\zeta_1)_{x_1} + u_{\zeta_2}(\zeta_2)_{x_1}$$

等々．これらをAuに代入して

$$Au = b^{11}u_{\zeta_1\zeta_1} + 2b^{12}u_{\zeta_1\zeta_2} + b^{22}u_{\zeta_2\zeta_2+} + (\text{低階の項}).$$

ここで新しい係数は

$$b^{11} = a^{11}((\zeta_1)_{x_1})^2 + 2a^{12}(\zeta_1)_{x_1}(\zeta_1)_{x_2} + a^{22}((\zeta_1)_{x_2})^2,$$

$$b^{12} = a^{11}(\zeta_1)_{x_1}(\zeta_2)_{x_1} + a^{12}((\zeta_1)_{x_1}(\zeta_2)_{x_2} + (\zeta_2)_{x_1}(\zeta_1)_{x_2}) + a^{22}(\zeta_1)_{x_2}(\zeta_2)_{x_2},$$

$$b^{22} = a^{11}((\zeta_2)_{x_1})^2 + 2a^{12}(\zeta_2)_{x_1}(\zeta_2)_{x_2} + a^{22}((\zeta_2)_{x_2})^2.$$

(連鎖規則にだけ依存する上の式は任意の変数変換に対して成り立ち，これは定数係数の場合に対して考えた線形方程式である必要はない)．行列Cを用いてかくと

$$b^{11} = a^{11}c_{11}^2 + 2a^{12}c_{11}c_{12} + a^{22}c_{12}^2,$$

$$b^{12} = a^{11}c_{11}c_{21} + a^{12}(c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12}) + a^{22}c_{12}c_{22},$$

$$b^{22} = a^{11}c_{21}^2 + 2a^{12}c_{21}c_{22} + a^{22}c_{22}^2.$$

判別式の関係は

$$b^{11}b^{22} - (b^{12})^2 = (a^{11}a^{22} - (a^{12})^2)[(\zeta_1)_{x_1}(\zeta_2)_{x_2} - (\zeta_1)_{x_2}(\zeta_2)_{x_1}]^2.$$

とくに定数係数の場合，右辺の第二因子は

$$J = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^2.$$

1対1変換に対して(線形であろうとなかろうと)，このヤコビアンは0でなく，従って，Aの分類は新しい変数ξ_1，ξ_2についても同じである．

肝心な点は勿論，次の三つの場合のいずれかに到達する様な1対1の変換が実際にとれることを示すことである(定数係数の場合，それは読者に演習問題としてまかせられる)．

$$\begin{array}{llll} \text{楕円型} & b^{12} = 0, & b^{11} > 0, & b^{22} > 0, \\ \text{双曲型} & b^{11} = b^{22} = 0, & b^{12} \neq 0, & \\ \text{放物型} & b^{11} = b^{12} = 0, & b^{22} \neq 0. & \end{array}$$

他の双曲型標準形式$b^{11}>0$，$b^{22}<0$，$b^{12}=0$はさらに変数変換によって得られる．1階導関数の項をもつ熱方程式の放物型標準形 $u_{\xi_1}-u_{\xi_2\xi_2}$は（もし存在するなら）変数変換のもとで，より低階の項を見落とすことのない様にして得られる．

例えば，放物型の場合を考えよう．ここで，判別式は0であり，これから

$$(b^{12})^2 = b^{11}b^{22}.$$

よって，$b^{11}=0$とすると$b^{12}=0$．それによって，$b^{11}=0$の方程式を解いた後で，標準形でかかれた方程式を得る．$a^{12}=(a^{22}a^{11})^{1/2}$の事実を用いると，$C$変換に対して，$b^{22}=1$と$b^{11}=b^{12}=0$の条件は

$$a_{11}^{1/2}c_{11} + a_{22}^{1/2}c_{12} = 0,$$
$$a_{11}^{1/2}c_{21} + a_{22}^{1/2}c_{22} = 1$$

となる．これらは明らかに解をもつ．

解析幾何学の錐体断面に対する分類や変換手続きにならって議論することは，教訓的である．その過程で，ここでは多次元の場合は扱わないけれども，その分類に示唆を得ることができる．

次の2次曲線を考えよう．

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0.$$

これは第二象限に焦点をもつ放物線である．解析幾何学の通常の手続きによれば，先ず混合項(xy)を消すように新しい座標(x_1, y_1)を導入する．すなわち，角度規則に従って

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

これから，新しい方程式は

$$25(y_1)^2 - 75x_1 - 70y_1 + 19 = 0.$$

次に，その標準形に変形して，$(y_1-7/5)^2=3(x_1+2/5)$．これから直ちに，グラフが描かれる．さらに，必要なら，座標軸を平行移動して，$y_2^2=x_2$の形式への変換が可能である．

さて，偏微分方程式

$$9u_{xx} - 24u_{xy} + 16u_{yy} - 18u_x - 101u_y + 19 = 0$$

を分類し，その標準形に変換する様に求められたとき，初めに，回転の変数変換を行い，

$$25u_{\eta\eta} - 75u_\zeta - 70u_\eta + 19 = 0$$

と変形し，さらに変数変換によって

$$u_{rr} - u_t = 0$$

を得る．

問題(a)　次を分類して変換せよ．

(i)　$u_{xx}-u_{xt}-u_{tt}-u_x-u_t=0$

(ii)　$2u_{xx}+u_{xt}+2u_{tt}+u=0$

(iii)　$-3u_{xx}+10u_{xt}-3u_{tt}+7u_x-u_t+u=0$

(b)少なくとも，線形変数変換において，上の判別式関係を確かめよ．

(c)双曲型や楕円型の場合，標準形に変換する線形変数変換が常に存在することを示せ．その一意性の度合いに言及せよ．

(d)上の錐体放物線の例に対して，幾何学的変換と微分変換の両方から実行せよ．

問題　1.9.2　特性解

分類に関連する課題(問題1.9.1参照)は表示Auの特性解に関するものである．2階線形方程式の特性解は，外向き拡散波の波線を述べ様とする限り，主として双曲型の場合に興味がある．上の分類手続きから，分類の変数変換が特性方程式

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a^{12} \mp \sqrt{(a^{12})^2 - a^{22}a^{11}}}{a^{11}}$$

を与える．判別式の符号により，楕円型では実数解がなく，放物型のときただ一個の解，また双曲型の場合二個の解がある．これらの解を方程式の**特性解**または**特性曲線**と呼ぶ．

この分類の変数変換と方程式の特性解の間の関係は，次の補助定理で示される．すなわち，“分類”の変数変換$\zeta=\zeta(x, y)$に対して，$\zeta(x, y)=$一定　が特性方程式

$$a_{11}(\zeta_x)^2 + 2a_{12}\zeta_x\zeta_y + a_{22}(\zeta_y)^2 = 0$$

の一般解であるとき，係数b^{11}(あるいはb^{22})は消えて，

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0.$$

そして，逆も成り立つ．

この補助定理を証明しよう．微積分学から，$y=y(x)$の特別の場合について，関数$z=\xi(x, y)$に対する陰関数の連鎖規則を思いだそう．連鎖規則から

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

$F(x, y)=z-c$とおき，点x_0の近傍で$F(x, y(x))\equiv 0$のとき，そこでの導関数は$dz/dx=0$．これから，重要な規則

$$y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

が得られる．よって，$\xi(x, y)=$一定　および特性方程式の解に陰関数の微分関係

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta_x}{\zeta_y}$$

を代入して，分類係数b^{11}が零であることがわかる．

逆に，b^{11}(またはb^{22})を0に等しいとすると２次方程式

$$a_{11}\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + a_{22} = 0$$

から解$(\xi_x/\xi_y)=(-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}})/a_{11}$が求まり，これから陰関数の微分法により，特性方程式が得られる．符号の変わることが重要であり，注意すべきである．

この分類-特性解の関係を，波動方程式

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

に対して説明しよう．分類手続きに従って，これを形式

$$u_{\zeta\eta} = 0$$

に変換する．そのためには，

$$b^{11} = a_{11}(\zeta_x)^2 + 2a_{12}\zeta_x\zeta_t + a_{22}\zeta_t^2 = 0,$$

$$b^{22} = a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_t + a_{22}\eta_t^2 = 0.$$

数多くのこの様な変換$\xi=r(x, t)$，$\eta=s(x, t)$は節1.1の問題2でなされた．線形変換

の範囲内であっても，それらが一意である必要はない．けれども，それらをどう選ぼうとも，波動方程式に対する特性方程式の解$t=t(x)$は同じである．この事，すなわち

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

から，波動方程式の特性解として次を得る．

$$t = x + c,$$
$$t = -x + c.$$

これらは，$(x,\ t)$平面上の45° の直線である．その直線に沿って，初期データ分布が伝わる．これについては後で取り上げられる（例えば，節2.5）．一方の線上でξが一定，他方でηが一定である．節1.1の問題2で見出された45°回転させた座標系で，波動方程式に対する標準形$u_{rs}=0$の特性方程式は，特性方程式$dr/ds=0$および特性曲線$r=$一定，$s=$一定を与えることに注意しよう．

問題(a)　次の方程式の特性解を分類し，かつ求めよ．

$$u_{tt} + 2u_{xt} + (\sin^2 x)u_{xx} + u_x = 0\,.$$

(b)　熱方程式$u_t-u_{xx}=0$の特性解を求め，それらを熱伝播の示すその速さが無限大になることに関係づけよ．節1.7の問題1を参照せよ．(c)節1.1で述べたTricomi方程式$yu_{xx}+u_{yy}=0$の特性解を調べよ．

問題　1.9.3　最大値原理

(強)最大値原理の主張は次で与えられる．Ω内で$\Delta u>0$，かつuが閉包$\overline{\Omega}$上連続であるとき，uの最大値は$\partial\Omega$上でのみ達せられる．ここで$\overline{\Omega}$はn次元空間の有界閉領域である．これは微積分学の局所最大に対する条件から容易にわかる．$u\in C^0(\overline{\Omega})$であるから，$\overline{\Omega}$上のどこかに最大値がある．それが内点$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$で得られたとすると，必ずそこで$u_{x_i}=0$，かつ$u_{x_jx_i}\leqq 0$．よって$\Delta u\leqq 0$．これは矛盾である．この様な関数$u$は**狭義に劣調和**であるといわれる．なぜなら，$\Delta u>0$のとき，uはそれらの極大値や平均値の下にたわむからである．容易に思いつく例は$u(x)=x^2$である．

(弱)最大値原理は，不等号が必ずしも狭義でない．すなわち，Ω内で$\Delta u\geqq 0$のとき，uは$\partial\Omega$上のどこかでその極大をとり，Ωの内でもとることがある．これは容易に(強)最大値原理から

$$v = u + \varepsilon r^2$$

とおいて導かれる．ここで$r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$．このとき，任意の正数εに対して$\Delta v=\Delta u+2n\varepsilon>0$．よって，$v$は$\partial\Omega$上でのみその最大値をとる．さて，有界領域$\Omega$を半径$R$の閉

球内にとると，$v \leqq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon R^2$．よって

$$u = v - \varepsilon r^2 \leqq v \leqq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon R^2.$$

εが任意であるから，$\varepsilon \to 0$として，uは$\partial\Omega$上のその最大値でおさえられることがわかる．

（通常の）最大値原理は，調和関数すなわち$\varDelta u=0$に対して，

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| \leqq \max_{\partial\Omega} |u(x)|$$

と述べられる．ときには次の様にもいいかえられる．

$$\min_{\partial\Omega} u \leqq \Omega \text{ 上の } u \leqq \max_{\partial\Omega} u.$$

（弱）最大値原理をuおよび$-u$に適用して，容易に導かれる．

問題(a)　最後に述べたことを確かめよ．(b)上の議論を修正して，任意の$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$に対して，次の有界性の評価式の成立を示せ．

$$|u(x, y)| \leqq \max_{\partial\Omega} |u| + (R^2/4) \max_{\overline{\Omega}} |\Delta u|.$$

これは安定性について述べているが，その理由を述べよ．
(c)熱方程式

$$\begin{cases} \Omega \text{ 内で } u_t - \Delta u = 0, \quad t > 0, \\ u(0) \\ \partial\Omega \text{ 上 } u(t), \quad t > 0 \end{cases} \text{は与えられている．}$$

に対する同様の最大値原理を述べて，証明せよ．それは，内部熱源をもたない物体Ωが初期的に（それが冷却中のとき）あるいはその後（外から加熱中のとき）のいずれであっても，その境界上でその最大温度をとることを主張している．
(d)できるだけ，偏微分方程式に対する最大値原理についての文献や複素解析関数論について，詳しく読まれるとよい．また，双曲型の方程式が自然な形の最大値原理を何故もたないかを考えよ．演習問題の追加として，4階の楕円型作用素（例えば，$\varDelta\varDelta u=0$）を考えよ．

問題　1.9.4　Picard-Cauchy-Kowalewskiの定理

常微分方程式に関する殆んどすべての文献で，初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

に対する次の基本的な存在定理が見出される．

Picardの定理． $f(x,\ y)$と$\partial f(x,\ y)/\partial y$が点$x=0$，$y=y_0$の近傍で連続であると

き，上の初期値問題の解は存在して，一意的である．

証明は通常，先ずODEの初期値問題と同値な積分方程式

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s))\, ds$$

に変えて，次に逐次近似の方法で収束することを示すことによってなされる．

問題(a)　この証明に対し，常微分方程式の参考書を調べよ．(b)縮小写像定理をこの積分方程式に適用して，証明をかき改めよ．この定理は，完備な距離空間で，どんな縮小写像に対しても不動点の存在を保証する．(c)積分方程式と微分方程式の初期値問題が実際に同値であることを示せ．

周知とはいい難いが，Picardの定理を偏微分方程式へ一般化する事実がある．その結果を述べる前に，次の事柄に注意する．

1．関数$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$が点$(x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0)$で解析的であるとは，近傍$N(x^0)$が存在して，そこでfが収束べき級数によって表示されるときである．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geqq 0} a_{k_1 \ldots k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{k_n}.$$

ここで，

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f(x^0)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

2．どんな偏微分方程式の初期値問題も，1階の準線形方程式系(問題1.9.1参照)に帰着され得る．それは，各$\partial u_i/\partial x_k$を新しい変数とおいてなされる．よって，方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

に対して，$r=f(t,\ x,\ u,\ q,\ p,\ s,\ v)$とおき，$t$に関して微分して$\partial r/\partial t=\cdots$などを求め，次いで，$\rho=\partial r/\partial t$とおいた後にこの過程を繰返せ．後述問題の$(c)$，$(d)$，$(e)$を見よ．

3.独立変数$x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t$の未知関数$u_1,\ \cdots,\ u_N$に対する一般の1階準線形方程式系の初期値問題は次のものである(簡単のため，初期点は原点にある様に平行移動された)．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + c_i, \qquad i = 1, \cdots, N,$$

$$u_i(0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \qquad i = 1, \cdots, N.$$

ここで，

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)}(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_N),$$
$$c_i = c_i(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_N).$$

Cauchy-Kowalewskiの定理. $a_{ij}^{(k)}$とc_iがすべて(0, 0, …, 0, 0, …, 0)で解析的であるとき，近傍N(0, 0, …, 0)で上の初期値問題の一意な解が存在して，それは初期点Oを通る.

この定理の証明は興味深く，大まかに述べると次の通りである．方程式に含まれたすべての関数が解析的であるから，すべてをべき級数に展開し，係数を等置することによって，この問題が解かれると期待される．解として求められた形式的べき級数の収束性を証明するには，優収束級数によってそれを示す必要がある．後者に対して，

$$M\left(1 - \frac{x_1}{R_1}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{x_n}{R_n}\right)^{-1}$$

のべき級数展開が用いられる．ここで，MとR_kは適当に選ばれる．この様に，証明の本質は幾何級数の適切な使用である．

問題 (a) 定理の証明を研究せよ．(b)（やや）任意の初期データ成帯に関するより一般のCauchy-Kowalewskiの定理に対して，文献を調査せよ．
(c) 上記2.で述べられている内容，すなわち，2階の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}), \\ u(0, x) = u_0(x), \\ u_t(0, x) = u_1(x) \end{cases}$$

に対する階数低下を念入りに行い，その結果得られた準線形系が同値であることを示せ．読者は次の各段階を確かめよ．

$$r = u_{tt} = f(t, x, u, q, p, s, v)$$

から，tに関して偏微分すると

$$r_t = f_t + f_u q + f_q r + f_p s + f_s r_x + f_v s_x$$

となる．ここで，xを含む項が欠けているのは，xとtが独立なためである．結果としての準線形1階方程式系は

$$\begin{cases} u_t = q \\ q_t = r \\ p_t = q_x \\ s_t = r_x \\ v_t = s_x \\ r_t = f_t(t, x, u, q, p, s, v) + f_u q + \text{上記の他項} \end{cases}$$

であり，初期条件は

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \\ q(0, x) = u_1(x) \\ p(0, x) = u_0'(x) \\ s(0, x) = u_1'(x) \\ v(0, x) = u_0''(x) \\ r(0, x) = f(0, x, u_0(x), u_1(x), u_0'(x), u_1'(x), u_0''(x)). \end{cases}$$

この準線形問題を満たすu，q，p，r，s，vの関数があると仮定する．それらが変数変換の方程式を満たすことを主張したい．もしそうなら，もとの2階の問題との同値性が確立されたことになる．

準線形系から，$u_t=q$．また，$(u_x-p)_t=0$ から，$u_{xt}=q_x=p_t$．よって $u_x-p=\alpha(x)$（ある x の関数）．しかし $t=0$ で $\alpha(x)=u_x(0, x)-p(0, x)=u'_0(x)-u'_0(x)=0$．よって，$u_x=p$．

$u_{tt}=q_t=r$ から，変数 r は定義に矛盾しない．

$(u_{xt}-s)_t=0$ から，$u_{tt}-s=\beta(x)$（xのある関数）．これは $t=0$ で $u'_1(x)-u'_1(x)=0$．同様に，$u_{xx}-v=\gamma(x)$（xのある関数）．これも $t=0$ で，$u_0''(x)-u_0''(x)=0$．よって，$u_{xt}=s$，$u_{xx}=v$．

明らかに，uは準線形系からもとの二つの初期条件を満たし，上と同様にして$(u_{tt}-f)_t=0$．よって，$u_{tt}-f=\delta(x)$（xのある関数）．これは$t=0$で$u_{tt}(0, x)-f(0, x, u_0(x), u_1(x), u'_0(x), u'_1(x), u''_0(x))=r(0, x)-r(0, x)=0$．

(d) (c)と同様にして，2階波動方程式の問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

を同値な1階の系になおせ．

(e) $f(x)=x$, $g(x)=1$に対して(d)を行い，そして解け．

問題1.9.5

(1)幾つかの歴史的考察． 何らかの高等数学を学んだことのある人は，殆んど誰でも，Dirichlet, Dirichlet原理, Dirichlet問題について聞かされている．この問題に関する簡潔な歴史的注意と，19世紀後半に数学の発展に果たしたその中心的役割を，節1.5に見ることができる．ここではもう少し深入りしよう．

問題． (a) Dirichlet自身が，現在では彼の名前を冠せられている問題，原理，境界条件を提起した正確な論文を見出せ．

Neumann境界条件は，問題にしている量の流束が境界を通して存在しないことが要求される応用に現れる．数学では，数人のNeumannがいて，そのうちの何人かが境

界値問題を扱った．

問題．(*b*)偏微分方程式の研究に著しく貢献したNeumannは何人いるか？特に，彼の名が冠せられた境界条件を提起した特定のNeumannとその正確な論文を見出せ．

ところが，しばしば第三種境界条件にその名が冠せられているRobinについては，殆んど知られていない．著者の好奇心はここでの議論に打克って，少々の情報*)を得た．紛れもなく，そこには興味ある物語があり，(もっとよく知っているけれども)その結末までたどることはせず，望むがままに追求しようとする読者へはそれを歴史的冒険として残しておこう．

問題．(*c*)もっと詳しく調べよう．特に，Robinが自分の名の冠せられた境界条件をどこで研究したかを正確に見出せ．(*d*)何がDebyeとSchrödingerを関係づけるか？(*e*)どちらのHückelか？そしてそれはなぜ？

(2)好適領域と非好適領域．これまで議論では，存在を認めて簡単に触れるだけで，技法上の困難をもたらすかも知れない様な領域Ωの病的なことに関しては避けてきた．節1.5で注目した様に，これらの疑問は最終的にHilbert, Lebesgue, その他によって，うまく解決された．応用で出会う殆んどすべての領域Ωは，たとえば静電荷が領域の境界上の点に集中的に賦与されている物理的状況を想像することは難しいことではないし，混乱を起こすこともない．実際，Lebesgueが与えたDirichet問題が可解でない領域の例†)は $y=e^{-1/x}$状の回転体のとげによって穿たれた3次元球であった(図1.9*a*)．

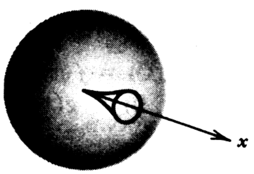


図1.9*a*

*)　Robinの科学著作集は1892年から1897年にかけてパリで行われたRobinの講義の学生によるノートから，Louis Raffyによって，編集された3巻からなる：(1) *Theorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondee sur l'idee de nombre*(関数の新しい理論，特に，数の概念に関して)；(2*a*) *Physique mathématique*(数理物理学)，(2*b*) *Thermodynamique générale*(一般熱力学)；(3) *Lecons de chimie physique*(物理化学講義)．見たところ，Robinの好んだ研究課題は熱力学で，彼はそれをおよそ20才から生涯の最後の数カ月まで考えつづけた．彼は43才で世を去ったが，その前に恐らく自分の論文の殆んどを燃やしてしまった．彼の初期の仕事の二つを挙げる．いずれも3ページの短報である．

"*Les gas parfaits suivent a loi de Dulong et Petit,*" Société philomathique(1877頃)．

"*Sur la chaleur réellement continue dans les corps et sur la vrai capacitécalorifique*" Bulletin de la Société philomathique IV, **25**, Octobor(1879)(訳者注：T. Abe and I. Onda, "*G. Robin and His Contributions to Mathematics*" Int. Symp. of History of Math. and Mathematical Education, August 7-10, **A-10**, *Gunma Univ.* (1987), Summary p.12)．

問題. (a)次の二つの意味で，好適領域の解釈を展開するよう文献(特に節1.6.1で注目したもの)に当たれ：(1)**発散定理領域**，すなわち，発散定理の適用を可能ならしめる領域(それらは**正則領域**，**正規領域**，**Gauss領域**などとも呼ばれる)，(2)**Dirichlet問題領域**，すなわち，その上で任意の連続な境界データfに対するDirichlet問題を解くことのできる領域(**Dirichlet集合**，**Dirichlet領域**などと呼ばれる)．
(b)特に，PoincaréとLebesgueの幾つかの貢献をかき下ろせ．
(c)"尖点"または"点欠"の条件が，Ωが好適か，非好適かの境い目に在る場合に関係するので，例えば(i)静電気の場合，あるいは(ii)Ωの内部でのBrown運動の場合に，物理学的に何を意味するか考えよ．
(d)領域の連結性は，それが発散定理領域なのか，Dirichlet問題領域であるかに従って，どんな効果を及ぼすか？特に，(i)環状領域$1/2<x^2+y^2<1$および(ii)点欠領域$0<x^2+y^2<1$についてどうか？
(e)これら二種類の領域Ωに及ぼす次元の効果は何か？
(f)節1.5.2で，問題にしている領域Ω上で偏微分方程式のGreen関数が存在すると仮定された．第三種好適領域Ωを，(3)Green関数$G(P, Q)$が存在するという意味で，(a)に加えよう．これを精密化して，(3)の領域をDirichlet問題領域(2)と関係づけよ．特に，解析関数の理論に関する参考書を調べて，2次元領域に対してこれを示せ．

(3) 変分原理とEuler方程式. 節1.5.3で，変分的に定式化された問題と変分的定式化から導かれる偏微分方程式の間にある一般的な関係が論じられた．そのときこの微分方程式は，この問題に対する**Euler方程式**と呼ばれ，線形とは限らない．逆に与えられた偏微分方程式から，変分的定式化へとうまく移すこともできる．変分問題と微分問題のこの双対性を示す常微分方程式の解説が節1.5.3で与えられた．

この小節では，Euler方程式が変分的定数式からどの様にして導かれるかを，偏微分方程式に対して解説したい．さらに具体的な事柄は節2.6で与えられる．取扱いを十分にすると，変分法の分野へと導かれる．

初めに，節1.5.3で論じられたDirichlet原理を考える．そこでは，Dirichlet問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で } \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上 } \ u = f \end{cases}$$

の変分的定式化を

$$\begin{cases} D(u) = \displaystyle\min_{\partial\Omega\text{上 } v=f} D(v), \\ D(v) = \displaystyle\int_\Omega |\mathrm{grad}\ v(x)|^2\, dx \end{cases}$$

†) H. Lebesgue, "Sur des cas d'imposibilité de Dirichlet," *Comptes Rendus, Soc.Math. France* **41**(1913), 17(訳者注：H. Lebesgue, "Sur le probléme de Dirichlet." *Rend. circ. Mat. Palermo,* **24**(1907), 371-402).

であると主張した. 前者を後者のEuler方程式として導こう. そうすると, どんな病的な領域Ωについても心配がないだろう. $\overline{\Omega}$上で定義された関数について発散定理や部分積分法が自由に用いられ(節1.6参照), また変分的特徴付けで極小にする解uが存在して, 面倒な関数ではないと仮定する.

こうして, 初等微積分学と同様, 汎関数*) $D(v)$はその導関数を0に等置して極小化される量とみなされる. 関数vの基礎ベクトル空間は関数空間で, 無限次元であるから, その方向微係数のすべてを0に等置して, 汎関数$D(v)$の極小化がなされるだろう. すなわち,

$$0 = \left.\frac{\partial D(u)}{\partial w}\right|_{\varepsilon=0} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{D(u + \varepsilon w) - D(u)}{\varepsilon}.$$

この極小化が境界$\partial\Omega$上でfに等しいすべての十分に好適な関数vについてとられるべきであるから, このとき, 指定されたvのすべてにわたって$v=u+\varepsilon w$ととる. ただし, 上式のwは$\partial\Omega$上で0に等しい任意の関数である.

上式中の差分商は等式

$$D(u + \varepsilon w) = D(u) + 2\varepsilon D(u, w) + \varepsilon^2 D(w)$$

から容易に計算される($D(u+\varepsilon w)$を展開). ここで

$$D(u, w) = D(w, u) = \int_\Omega \operatorname{grad} u(x) \cdot \operatorname{grad} w(x)\, dx.$$

これから,

$$D(w, u) = 0.$$

Green第一等式(節1.6参照)

$$D(w, u) = \oint_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \int_\Omega w\, \Delta u\, dx$$

と$\partial\Omega$上で$w=0$なることから, すべての関数$w(x)$に対して

$$\int_\Omega w(x)\, \Delta u(x)\, dx = 0$$

が結論される. これは, Ω上で点別に$\Delta u=0$であると要請された, いわゆる“弱い形式”あるいは“双対形式”である. このとき, Δuを0にしない点x_0があると仮定し, wを適当な同符号の連続関数でx_0の極く近傍を除いて0である様にとると矛盾が生ずるので, $C^2(\Omega)$級の関数uに対して$\Delta u=0$が結論される.

*)　一般に, 汎関数はベクトルからスカラーへの写像である. ここでは, それはΩ上で定義されたどれも十分に好適な関数vに対して, ある実数$D(v)$を指定する.

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta u = \lambda u, \\ \partial\Omega\text{上}\ \ u = 0. \end{cases}$$

変分的定式化からEuler方程式を計算する第二の説明として，固有値問題を考えよう．これは最小固有値λに対して

$$\begin{cases} \lambda = \min\limits_{\partial\Omega\text{上}\ v=0} \dfrac{D(v)}{\|v\|^2}, \\ \\ \|v\|^2 = \displaystyle\int_\Omega v^2(x)\,dx \end{cases}$$

として変分的に定式化された．上の例と同じく，極小条件を得るための汎関数のすべての方向微係数を0に等置する．すなわち，$\partial\Omega$上で消えるすべての十分に好適な関数wに対して

$$0 = \left.\frac{d\lambda(u)}{dw}\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\dfrac{D(u+\varepsilon w)}{\|u+\varepsilon w\|^2} - \dfrac{D(u)}{\|u\|^2}}{\varepsilon}.$$

ふたたび等式$D(u+\varepsilon w)=D(u)+2\varepsilon D(u,\ w)+\varepsilon^2 D(w)$と類似の等式$\|u+\varepsilon w\|^2=\|u\|^2+2\varepsilon\int_\Omega uwdx+\|w\|^2$を用いると，通分した後，微分商は次となる．

$$\frac{[2D(u,\ w) + \varepsilon D(w)]\|u\|^2 - D(u)[2\int_\Omega uw\,dx + \varepsilon\|w\|^2]}{\|u\|^2[\|u\|^2 + 2\varepsilon\int_\Omega uw\,dx + \|w\|^2]}.$$

$\varepsilon\to 0$の極限をとり，先と同様Green第一等式を用いると，順に

$$D(u,\ w) - \frac{D(u)}{\|u\|^2}\int_\Omega uw\,dx = 0$$

および

$$\int_\Omega w(x)(-\Delta u(x) - \lambda u(x))\,dx = 0.$$

これから，Ωにおいて$-\Delta u=\lambda u$.

問題．（a）極小曲面の方程式（本章の序論を参照）に対して，Dirichlet問題で上で行ったと同じことを試みよ．すなわち，Euler方程式

$$\begin{cases} (1 + (u_y)^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + (u_x)^2)u_{yy} = 0,\ (x, y)\in\Omega, \\ u = f,\ (x, y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

を次の変分的定式化から求めよ．

$$\begin{cases} E(u) = \min\limits_{\partial\Omega\text{上}\ v=f} E(v), \\ E(v) = \int_\Omega [1 + |\mathrm{grad}\ v(x)|^2]^{1/2}\,dx. \end{cases}$$

(b) Euler方程式のLagrangeおよびHamiltonの定式化に対する一般的な関係付けを考察せよ．
(c) 波動方程式$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=0$に対するラグランジアンの例を与えよ．

問題1.9.6

(1)幾つかの歴史上の注意．問題1.9.5(1)その他で行った様に，しばらく少なくとも，歴史的背景やまた人間的側面に読者の目を向けさせたい．けれども，時間や他の必然性によって，その努力に限りがある．ここでは，Fourier級数の点別収束を理解した過程についての二，三の簡潔な注意に限定しよう．よって，節1.6の一局面だけ，実際には節1.6.3の一部のみを入念に仕上げよう．他方，Fourier級数とその点別収束とは，追々明らかにされる様に，偏微分方程式の研究にとって最も本質的な一つの要素である．

節1.6.1, 1.6.2で議論された話題の歴史的な背景は省略されたので，少なくとも関心のある読者に対して，次の問題を提起しなければならない．

問題．(a) 発散定理(1)と不等式(2)の発展の歴史的背景や人間的側面を簡潔にたどれ．

以下に述べる歴史的注釈は，一般に三角Fourier級数に対する点別収束にのみ与えられたもので，一般Fourier級数（第2章参照）に対するものではない．後述の1.9.6(2)でDini判定を証明する際みられる様に，点別収束の確立は，用いられる特定の展開関数に強く依存することになる*)．

以前（節1.5）に示した様に，任意の関数を正弦関数によって展開する発想はD. Bernoulliに，Fourier係数の計算はEuler，そして区間上の任意の2乗可積分関数に対するFourier級数が与えられた関数に平均収束するだろうという最終的な記述はF. Riesz, E. Fisher, H. Lebesgueに負っている．

Dubois-Reymondは1876年，連続関数fが点x_0で発散するFourier級数の部分和s_N^fをもつことができることを示した．FejérとLebesgueは1904-1905年に，可積分関数fのLebesgue集合上で（これらの概念については，1.9.6(3)と1.9.7(3)を参照），s_N^fがCesaro総和可能である（大雑把にいって，平均部分和は収束する）ことを示した．Kolmogorovは1926年，部分和s_N^fが悪い意味で点別に（区間内殆んど到るところで）発散する様な可

*) 多くの場合，一般の展開および三角級数展開はともに点別に収束するか発散するだろうということが，一方で**Sturm-Louvilleの理論**（節2.4参照）で示されるが，それは本書の範囲を超えている．

積分(L^1級)関数fを見出した. Carlesonは1966年*)に, すべての2乗可積分関数fが殆んどすべてのxでfに点別収束するFourier部分和s_N^fをもつことを示した.

問題. (b) これに加えられるべき歴史を簡潔に述べよ.

(2)Dini判定とGibbs効果. 再び, Fourier三角級数の点別収束に注意を向ける. 偏微分方程式のFourier級数解が変数分離法で与えられたとき, その点別収束の性質を知りたい. 節1.6.3で導入されたいわゆるDini判定はその十分条件を与える. Gibbs効果は, 与えられた関数fの不連続点の左と右で, 順次に和をとっていく部分和の様子を精密化したものである.

三つの"Dini†)判定"を次に述べよう.

(Dini判定) 周期2πの区分的に連続な可微分関数$f(x)$のFourier級数が, 関数fの連続な点xでは関数$f(x)$に点別収束し, fの跳躍不連続点xでは$f(x)$の平均値に収束する(図1.9b)ことを述べる.

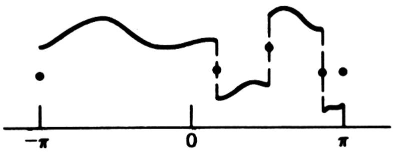


図 1.9b

(強Dini判定) さらに, $f(x)$が連続でかつ区分的に連続な導関数をもつとき, その収束は一様である(図1.9c).

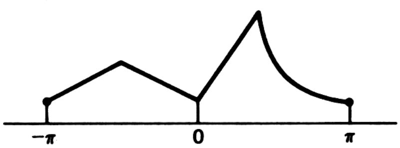


図 1.9c

(弱Dini判定) $f(x)$が区間上可積分(すなわち, $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx<\infty$)でかつ$x$でHölder連続であるとき, そのFourier級数はそこで$f(x)$に収束する(図1.9d).

*) L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series," *Acta Math.*, **116** (1966), 135-157.

†) イタリヤの数学者U. Diniで, 彼は1870年代ピサでFourier級数と実変数論で仕事をした.

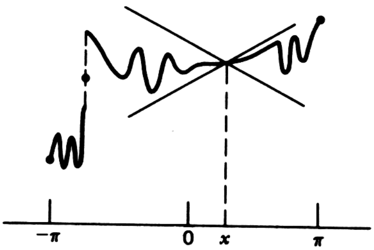


図 1.9d

問題. (a)(弱)Dini判定に対する後述の証明の概要をたどれ. (b)他の判定に対しては文献に当ってみて, そのうちの一つを証明せよ.

$f(x)$が区間$-\pi \leqq s \leqq \pi$で$\int_{-\pi}^{\pi}|f(s)|ds < \infty$を満たし, かつ$x$でHölder連続であるとする. これは関数の連続性と可微分性の中間的な条件であって, $-\pi \leqq s \leqq \pi$のすべてのsに対して

$$|f(x) - f(s)| \leqq M|x - s|^{\alpha}$$

である様な定数M, $\alpha > 0$の存在を意味する. そこには, fが区間〔$-\pi, \pi$〕を超えて, 周期的に拡張されることが仮定されている.

$f(x)$に対する古典的な三角Fourier級数は

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

である. ここで, $a_n = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\,ds$, $b_n = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ns\,ds$. S_Nを第N項部分和とする. すなわち

$$S_N(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$S_N(x) \to f(x)$ $(N \to \infty)$を示したい.

証明(概要).

(1)三角等式

$$\tfrac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos N\theta = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$$

は次の様にしてわかる.

$$\begin{aligned} 2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\left(\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n\theta\right) &= \sin(\tfrac{1}{2}\theta) + \sum_{n=1}^{N} 2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos n\theta \\ &= \sin(\tfrac{1}{2}\theta) + \sum_{n=1}^{N} (\sin[(n + \tfrac{1}{2})\theta] \\ &\qquad - \sin[(n - \tfrac{1}{2})\theta]) \\ &= \sin[(N + \tfrac{1}{2})\theta]. \end{aligned}$$

この等式の右辺はしばしば$D_N(\theta)$とかかれ，**Dirichlet核**と呼ばれる．

(2)a_n, b_nをxでのFourier部分和に代入すると，

$$S_N(x) = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\cos nx \cos ns + \sin nx \sin ns)\right) ds$$

$$= \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(x - s)\right) ds$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\frac{\sin[(N + \frac{1}{2})(x - s)]}{\sin[\frac{1}{2}(x - s)]}\, ds$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \theta)\,\frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}\, d\theta.$$

ここで，(1)に示した等式，変数変換$x-s=\theta$，被積分関数の周期性が用いられた．

(3)$D_N(\theta)$が，(1)により，性質

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) = \pi$$

をもつから，差をとると，

$$S_N(x) - f(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x + \theta) - f(x)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}\right)\sin[(N + \tfrac{1}{2})\theta]\, d\theta.$$

(4)Riemann-Lebesgueの補助定理（休止第2回を見よ）によると，関数$h(\theta)$が区間$(-\pi, \pi)$で可積分であるとき，

$$(h, \sin[(N + \tfrac{1}{2})\theta]) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\sin[(N + \tfrac{1}{2})\theta]\, d\theta \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

ここで，関数$\varphi_N = \sin[(N+1/2)\theta]$は$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$から（僅かの計算の後）わかる様に

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin[(N + \tfrac{1}{2})\theta]\sin[(M + \tfrac{1}{2})\theta]\, d\theta = 0, \qquad N \neq M$$

の意味で直交関数で，かつ$\varphi_N(\theta)$がこの区間上で一様有界であることが要求される．

(5)$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$上で

$$h(\theta) = \frac{f(x + \theta) - f(x)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \quad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$$

とおき，$\sin(\frac{1}{2}\theta)/\theta \to \frac{1}{2}\ (\theta \to 0)$に注目すると，(4)から，

$$S_N(x) - f(x) \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

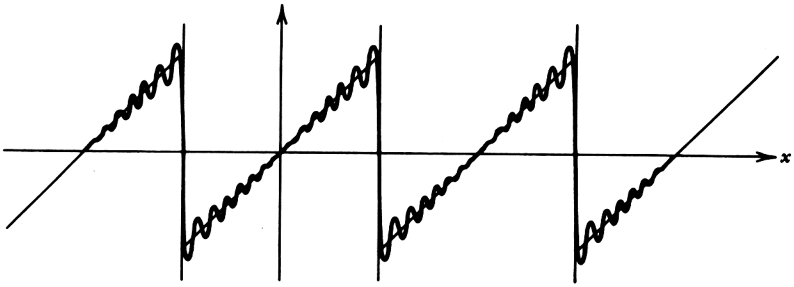


図 1.9e

がわかる．ただし，xでHölder連続あるいは可微分な関数fに対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta)|\, d\theta < \infty, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x+\theta)-f(x)}{\theta}\right| d\theta < \infty$$

のいずれも成り立つものとする．

Gibbs効果は，関数のFourier級数が関数の不連続性とどの様に順応するかを述べる．これは鋸歯状波に対して，J. W. Gibbs*)によって初めて指摘された．この様な関数に対して，Fourier第N項部分和を図示すると，図1.9eの様になる．s_N^fのグラフは（平面上一様に）傾いた鋸歯状の斜面と示された垂直線とからなるものに近づく．垂直な"突出"部分の量を（いわば，周期2πの区分的に可微分な関数に対して）決定することが可能で，それは，上下どちらにしても，不連続点x_0でのfの跳躍量に次の因子を乗じた大きさをもつ．

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds \cong \frac{0.281}{\pi} \cong 0.0895.$$

問題．（c）Gibbs効果を次の方形波に対して，研究せよ．

$$f(x) = \begin{cases} -1, & (2n-1)\pi < x \leqq 2n\pi, \\ +1, & 2n\pi < x \leqq (2n+1)\pi. \end{cases}$$

fに対するFourier部分和の幾つかを描け．このとき，突出量が上で与えた大きさの量であることを示せ．

(3)Lebesgueの優収束定理．節1.6.2で$L^p(\Omega)$空間が導入された．節1.6.3で，Fourier級数を理解するのに本質的な$L^2(a, b)$で収束性が議論された．節2.4で，**"重み付き"** L^2空間，$L^2(a, b, r)$が扱われる．

*) J. W. Gibbs, Fourier series, *Nature* **59** (1899), 200&606. この事と他の貢献によって，Gibbsは，応用数学の分野の顕著な仕事に対してアメリカ数学会から毎年授与される彼の名を冠した賞によって，栄誉を得た．

一方で，またどこかで述べられた様に，扱われた関数の大部分は，通常の(Riemannの)意味で可積分であって，積分のより拡張された(Lebesgueの)意味を必要としないだろう．よって，読者は多くの場合，病的なことを心配せずにL^2収束性によって，事を済ませることができる(すなわち，それが収束するとき，それをL^2収束と呼んでよいだろう)．

それでも，多くの場合に極めて有用であり，かつRiemannの枠内でさえ有意なLebesgue理論の一局面がある．それは，Lebesgueの優収束定理で，恐らくLebesgue理論で最も重要な収束定理である．特に，"積分記号のもとで微分すること"は有用である．あとで，熱方程式の解が初期値を満たすことの厳密な取扱いにこれが用いられる(問題1.9.7(3))．

Lebesgue優収束定理の述べるところは，可積分な関数列$\{u_n(x)\ ;\ u_n \in L^1(\Omega)\}$が一様有界であり，すなわち$|u_n(x)| \leqq M(x)$となる可積分関数$M(x)$が存在して，$\Omega$のすべてのあるいは"殆んどすべての"$x$に対して，$u(x)$に点別収束するとき，$u_n(x)$は$u(x)$に平均収束すること(すなわち，$u(x) \in L^1(\Omega)$である．特に，極限関数$u(x)$がまた可積分であること，および$n \to \infty$のとき，$\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|dx \to 0$となることが保証される．

積分記号のもとでの微分法に対しては，例えば，$u_n(y) = f(x, y + \varDelta_n y) - f(x, y)$とおいて，Lebesgue優収束定理を用いると，$(d/dy)\int_a^b f(x, y)\, dx$を求めることができる．ここで，$\varDelta_n y$は$n$の増加に従って0に減少する$y$の小さな増分である．すなわち，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{u_n(y)}{\Delta_n y}\, dx.$$

問題． (*a*) $L^1[a, b]$関数にLebesgue優収束定理を受け入れて，上の積分記号下での微分法を正当化せよ．(*b*) Lebesgue積分論に関する良い参考書を入念に調べて，そこに見出される他の二，三の重要な収束定理をかき下ろせ．(*c*) 優収束定理で，Ωの"殆んどすべての"xに対して，$u_n(x) \to u(x)$なる概念に出会った．これは"殆んど到る所で"収束することを意味する．二，三の簡単な例によって，それを理解せよ．

問題1.9.7

自己共役性の概念は，偏微分方程式にとって重要であり，応用，例えば与えられた問題で，すべての境界条件と固有値が満たされることを確かめる場合には，なおさら重要になる．微分作用素に対して，自己共役性をはっきりさせることはかなり微妙であって，超関数的導関数の概念に結びつく．これら二つの概念と，それらの関数を以下(1)と(2)で説明しよう．

(1) 自己共役作用素． まず，n次元実Euclid空間上の$n \times n$行列作用素$A = [a^{ij}]$に対して，その共役作用素A^*は次式で定義された．

$$\langle Ay, x\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}y_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^{ji}x_i y_j = \langle y, A^* x\rangle.$$

ここで, A^*はAの転置〔a^{ji}〕(複素数の場合には複素共役の転置)である. 微分作用素, 特に$L=d^2/dx^2$を, 区間$0\leqq x\leqq\pi$で定義された実数値の(複素数値でも同様)2乗可積分関数$u(x)$の空間$L^2[0,\pi]$で考えよう. $C^2(0,\pi)\cap C^1[0,\pi]$に属し, かつ両端点で消える関数$u$, v, すなわち, $u(0)=u(\pi)=v(0)=v(\pi)=0$に対して, 行列$A$で与えたと同様な関係が得られる. すなわち, 部分積分法によって,

$$\langle Lv, u\rangle = \int_0^{\pi} v''(x)u(x)\,dx = \int_0^{\pi} u''(x)v(x)\,dx = \langle v, Lu\rangle.$$

この様な場合, Lは対称作用素と呼ばれる. よって, 演算$Lu=u''$で定義され, 条件($u(0)=u(\pi)=0$)を満たす全ての関数$u\in C^2(0,\pi)\cap C^1[0,\pi]$からなる領域$D(L)$上に作用する作用素$L$は対称である. 一般に, 対称でかつ自己共役な作用素は次の様に定義される*)

定義(共役作用素L^*). 与えられたLに対して, (uに依存する)wが存在し,

$$\langle Lv, u\rangle = \langle v, w\rangle$$

をLの領域$D(L)$のすべてのvに対して成り立たせる様なuのすべての集まりを$D(L^*)$とし, $L^*u=w$と定義する. よって$D(L)$のすべてのvと$D(L^*)$のすべてのuに対して

$$\langle Lv, u\rangle = \langle v, L^*u\rangle.$$

定義(対称作用素). Lが対称作用素といわれるのは, $L\subset L^*$すなわち$D(L)$が$D(L^*)$に含まれ, かつ$D(L)$のすべてのvに対して$Lv=L^*v$が成り立つときである.

いいかえると, 対称作用素Lは$D(L)$のすべてのu, vに対して

$$\langle Lv, u\rangle = \langle v, Lu\rangle$$

の意味で対称である.

定義(自己共役作用素). Lが自己共役であるといわれるのは, $L=L^*$, すなわちLが対称でかつ$D(L)=D(L^*)$のときである.

上の行列の場合, $D(A)=D(A^*)=$"すべてのn次元ベクトル"であるから, 対称性と自己共役性の概念は一致し, Aが対称的であるための必要十分条件は, Aが対称行列であること, すなわち, 〔a^{ij}〕=〔a^{ji}〕. $D(L)=\{u\in C^2(0,\pi)\cap C^1[0,\pi],\ u(0)=u(\pi)$

*) $D(L)$が$L^2[0,\pi]$で稠密であることを暗黙のうちに仮定した. これは多くの例で常に出会っている専門的手段である. 問題2.9.3を見よ. そこでは, C_0^∞関数uが$L^2[0,\pi]$で稠密なことが示される.

$=0\}$を領域として定義された上の微分作用素Lは，先に行った部分積分法の議論によって，対称である．後でわかる様に，必ずしもC^2でない関数u(例えば，C^1ではあるが，区分的にのみC^2の関数)のLebesgueの意味(超関数的意味と同値)で2階導関数を計算することができ，この意味で，与えられた$D(L)$は，Lが自己共役であるために十分大きな空間ではない．あらゆる階数の超関数的導関数を定義することができるが，次の小節では2階の場合に制限される．

問題．　(a)領域$D(L)=\{u\in C^2(0,\pi)\cap C^1[0,\pi],\ u(0)=u(\pi)=u'(0)=u'(\pi)=0\}$をもつ作用素$Lu=u''$は，境界条件が多すぎるために，対称ではあるが自己共役でないことを示せ．(b)領域$D(L)=\{u\in C^2(0,\pi)\cap C^1[0,\pi]\}$をもつ作用素$Lu=u''$は境界条件が少なすぎて，対称ではないことを示せ．$(c)$上の(1)で述べたことの幾つかを確かめよ．

(2)超関数的導関数．　区間$(0,\pi)$で定義された関数uが与えられたとする．$C_0^\infty(0,\pi)$のすべての“test関数”φに対して，“部分積分法”の関係

$$\langle L\varphi,\ u\rangle\equiv\int_0^\pi \varphi''(x)u(x)\,dx=\int_0^\pi \varphi(x)w(x)\,dx\equiv\langle\varphi,\ w\rangle$$

が成り立つとき，uは超関数的な2階導関数をもつといわれ，それは$u''=w$で定義される．ここで，$C_0^\infty(0,\pi)$は区間$(0,\pi)$内に完全に含まれる台をもつ無限回可微分な関数の集合である．

先に定義した共役作用素L^*との類似に気づくだろう．初めから，$D(L)$を$D(L)=C_0^\infty(0,\pi)$と制限してしまうと，超関数的2階導関数をもつ関数uの全体は，より大きな領域$D(L^*)$を完全に含むことになる．

Lebesguer理論を考慮して，作用素Lを自己共役にする適正な領域$D(L)$は次であることを示すことができる．すなわち，$D(L)=\{$次の二つの性質をもつ2乗可積分関数；ｉ)2乗可積分な超関数的1階と2階の導関数をもつ，ii)(適当に弱い意味で)境界条件$u(0)=u(\pi)=0$を満たす．$\}$．

超関数的導関数，弱導関数，一般化された導関数，強導関数などの言葉が文献に見られる．多くの場合(適当に可積分であれば)，それらは少なくとも局所的に同一であり，Lebesgueの意味で“殆んど到る所で微分すること”に相当する．勿論すべてのtest関数や実用上出会う多くの他の滑らかな関数に対して，上記のものはRiemannの意味で通常の導関数である．超関数的偏導関数に対しても変りはない．

問題．　(a)部分積分法の演算が超関数的導関数に対しても，通常の導関数と全く同じに行えると仮定して，上記の作用素Lが自己共役であることを示せ．
(b)関数uが弱いあるいは超関数の意味で調和であるといわれるのは，すべてのtest関数$=\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$に対して$\int_\Omega u\Delta\varphi dx=0$となるときである．1次元で$u$が区間$(0,\pi)$上で弱

調和で，かつ$C^2(0,\pi)$級の関数であるとき，uは$(0,\pi)$上通常の意味で調和であることを示せ．

(3)熱方程式の厳密な扱い． 問題1.9.7を熱方程式の初期値問題のより深い考察によって，終らせたい．これを行うに当って，次の三点に目標をおく．

(i)Lebesgue理論(特に，偏微分方程式の進んだ数学的研究におけるLebesgue優収束定理とLebesgue関数集合)の利用を解説すること．

(ii)熱方程式の物理学的理解，特にその極端に滑らかな解の振舞いについての理解を深めること．

(iii)Green関数が一旦知られると，その威力は，多くの存在，一意性，安定性，構成，正則性，近似の結論を得させてくれて，すっかり明らかになるはずだということ．

線形熱方程式

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

を節1.3の問題2で簡潔に考えた．そこで示された様に，Green関数

$$G(x, y, t) = \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty, \\ \qquad t > 0 \end{cases}$$

は，$t>0$で熱方程式を満たす．よって，解

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) f(y)\, dy, \qquad t > 0$$

の存在を確かめることは，積分記号のもとで微分できるという条件を与えることに帰着された．

一意性の疑問に対しては，解候補のクラス$\{u\}$につけられるべき正則性の条件をかなり注意深く探る必要がある．それについては例えば，xとtの両方について，連続でかつ無限遠で急速に減少する十分連続な導関数をもつ関数$\{u\}$とデータ$\{f\}$に考えを制限して，標準的な高等微積分学によって探れるだろう．節2.2とそこの問題1を見よ．

さて，Lebesgue積分論の初歩を用いて，より進んだ結果がどの様にして得られるかを概述しよう．確かめる必要のある幾つかの計算は節末の問題として残される．L^p空間とその理論の議論に対しては，節1.6.3および問題1.9.6(3)を見よ．

定理

ある$1\leqq p\leqq\infty$，$t>0$に対して，$f\in L^p(-\infty,\infty)$とする．このとき，Green関数による表現公式

$$u(x,\ t)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ y,\ t)f(y)\ dy$$

は, $-\infty<x<\infty$, $t>0$に対して熱方程式の無限回可微分な解$u(x,\ t)$を与える. 更に, $u(t)$は“殆んどすべての”xに対し, $t\to0$で$f(x)$に点別に収束する. fが連続でコンパクトな台をもつとき, $t\to0$の点別収束はxについて一様であって, 解$u(x,\ t)$は$-\infty<x<\infty$, $t>0$に対して連続である. 初期データに関する安定性は次の意味で成り立つ.

$$\max_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0<t_0\leqq t}} |u_1(x,\ t)\ -\ u_2(x,\ t)|\ \leqq\ \text{定数}\ \|f_1\ -\ f_2\|_p.$$

解$u(x,\ t)$は, $-\infty<x<\infty$で一様に, $(t^{1/2})^{1/p}$の割合で$t\to\infty$のとき, 0に漸近的に近づく.

上の結果の教えるところは, すべてのデータに対して, それがどんなに悪いものであっても(大変特異な熱源をもつデータを除き), 熱方程式が直ちにそれを滑らかにし, できる限り広くエネルギーをばらまき始めるということである.

証明(概要).

任意の関数$w\in L^p(-\infty,\infty)$, $1\leqq p<\infty$, に対して

$$\|w\|_p\ =\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |w(y)|^p\ dy\right)^{1/p}$$

また

$$\|w\|_\infty\ =\ \operatorname{ess.}\sup_{-\infty<y<\infty}|w(y)|.$$

そして, $p^{-1}+q^{-1}=1$によって, 任意に与えられたpに共役なqが定義された(節1.6参照). $p=\infty$の場合と時には$p=1$の場合は, しばしば他のpとは別個に扱われる.

(1)　$p=\infty$に対し, $\|G(x,\ y,\ t)\|_\infty=1$. また$1\leqq p<\infty$に対して

$$\|G(x,\ y,\ t)\|_p\ =\ \frac{c(p)}{(t^{1/2})^{1/q}},\qquad c(p)\ =\ \frac{1}{(4\pi)^{1/2q}\cdot p^{1/2p}}.$$

これは積分変数の変換$s=\sqrt{(p/4t)}\,(y-x)$を施し, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\pi^{\frac{1}{2}}$から容易にわかる.

(2)$n=1,2,3\cdots$に対して, $(\partial^n/\partial t^n)G(x,\ y,\ t)$は$(x-y)^2$の多項式の$e^{-(x-y)^2/4t}$倍であることがわかる. ここで, この多項式の係数はtの関数であり, 任意の有界な正区間$0<\alpha\leqq t\leqq\beta<\infty$で$t$に関して上にも下にも有界である. $e^{-(x-y)^2/4t}(x-y)^{2k}$がすべての$x$, kに対して$L^p(-\infty,\infty)$に属することがいえるので, $(\partial^n/\partial t^n)G(x,\ y,\ t)$も$L^p(-\infty,\infty)$に属する. この計算は, $\int_0^{\infty}e^{-s^2}s^{2k}ds<\infty$を示すことになる.

有界区間$-\infty<a\leqq x\leqq b<\infty$の$x$に対しても同様である.

(3)次に積分記号のもとで微分しよう. すなわち, $n=1,2,3\cdots$に対して

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x, y, t) f(y)\, dy,$$

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x, y, t) f(y)\, dy.$$

これは，帰納法とLebesgueの微分演算定理によって確かめられる．すなわち，上の(2)を用いて，差分商は有界で

$$\left|\frac{\Delta G(x, y, t)}{\Delta t}\right| \equiv \left|\frac{G(x, y, t) - G(x, y, t_0)}{t - t_0}\right| \leqq g_{t_0}(x).$$

ここで，$g_{t_0}(x)$は$L^q(-\infty<x<\infty)$に属する．よって，Hölder不等式（節1.6.2参照）により，$\Delta G/\Delta t \in L^q$かつ$f \in L^p$であるから，$\Delta Gf/\Delta t$は$L^1$に属する．Lebesgueの優収束定理を適用すると（問題1.9.6(3)参照），

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}(x, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta G(x, s, t_0)}{\Delta t} f(s)\, ds$$

は収束して

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x, s, t_0)}{\partial t} f(s)\, ds.$$

(4)$u(x, t)$が熱方程式を満たし，かつ$C^\infty(-\infty<x<\infty,\ t>0)$級であることもわかる．$C^\infty$級に属することは(2)と(3)の考察に類似して$\varepsilon-\delta$論法を用いるか，あるいは全く別にLebesgue理論を用いて示される．

(5)Hölder不等式によって，安定性の結果

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqq \|f_1 - f_2\|_p \|G(x, \cdot, t)\|_q$$

が得られる（他の安定性，例えば$\|u_1-u_2\|_{p\text{または}q}$についての結果はどうか？）．$u_2=f=0$ととり，(1)を用いると，$t\to\infty$のとき$u$が0に漸近収束することが得られる．

(6)任意の与えられた局所可積分関数$f(x)$，よって任意のL^pに属する任意のfに対して非常に興味ある集合は

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(x) - f(s)|\, ds = 0$$

である様な$-\infty<x<\infty$の**Lebesgue集合**$\{x\}_f$である．Lebesgue集合$\{x\}_f$は測度0の集合だけを除いて，殆んどすべての$-\infty<x<\infty$を含む．解$u(x, t)$がLebesgue集合$\{x\}_f$のすべてのxに対し，$t\to 0$のとき$f(x)$に収束することを示すことができる．特に，この集合は$f(x)$の連続な点xすべてを含む．必要なら，fのより小さな連続点の集合内のxに対して，$t\to 0$における$u(x, t)$の$f(x)$への収束はもっと直接的に示される．

問題. (a)大雑把に述べた計算の幾つかを確かめよ. (b)Lebesgue積分論の初歩を既に習得し終えた読者はすべてを詳しく確認するがよい. (c)熱方程式に対するGreen関数を初等統計学の正規確率分布に対する密度関数として説明せよ.

問題1.9.8 非線形振動とVan der Pol方程式

まず, 全体的な見通しについて三つの点を述べよう.

(1) 節1.8で, 分岐の理論の簡単な導入をはかった. そこでとられた立場は, 最近はやりのものであるが, 非線形境界値問題のそれであった. しかるに, 歴史的にみると, 随分と様々なものがあった. 特に常微分方程式の場合, 起源はPoincaréおよび天体力学における彼の仕事にさかのぼる*). 常微分方程式に対しては, 2階方程式は1階方程式系としてかき改められ, 次にその系の解軌道の相平面による非常によく発達した解析法(以下に述べる)が用いられる.

(2) この様に今まで考えられた分岐理論の大部分の例においては, 簡単なため常微分方程式での解釈のみがおこなわれた. いろいろな応用に関するもともとの偏微分方程式は物理学的精度と数学的豊かさをより大きくもたらし, 大変興味深いが, それらを体系的に扱うことは本書の範囲を超えており, また多くの場合, 未完成である.

(3)非線形振動の研究は分岐理論をはるかに超える大きな対象である. 大雑把にいって, 非線形振動の問題を分岐理論によって研究することは次の様な状況によって正当化される. すなわち, 物理学的なまたは数値的な根拠によって, パラメータのある臨界値で, 解の定性的な振舞いに根本的な変化が起こりそうなのである.

この最後の節の主要目的は, 扱われる非線形方程式が自励系の常微分方程式であるか, もしくは何らかの仮定を加えて自励系の方程式に単純化されるとき, その方程式の研究で用いられる**相平面法**を過大視してはいけない事実に, 注意を喚起したいことである.

この相平面法を解説するために, 次のVan der Pol方程式†)を考えよう.

$$u''(t) + \lambda(u^2(t) - 1)u'(t) + u(t) = 0, \qquad \lambda > 0.$$

この方程式は, 電子管回路における自励振動その他‡)への応用がある. ここで非線形項は$\lambda(1-u^2(t))u'(t)$である. それは非線形性の他にもパラメータλを含み, その項の符号に依存して, 系にエネルギーを供給するか消滅させるかによる減衰項を示す. いわゆる定常状態(または極限閉軌道, 後述参照)は, 1サイクル中におけるエネルギー増減の平均値が零に向うとき, 起りやすいと期待される.

*) H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste* (Gauthier-Villars, Paris, 1892) (訳者注：一部和訳あり, ポアンカレ 常微分方程式-天体力学の新しい方法-(福原満洲雄, 浦太郎訳)共立出版, 1970).

†) B. Van der Pol, "On relaxation oscillations," *Phil. Mag.* 7*th Ser.* **2**(1926), 978-992.

‡) 真空管は半導体デバイスでおきかえられているけれども, Van der Pol方程式は相平面解析で十分によく研究された方程式の古典的な原型を保っている. 最近の**エレクトロニクス理論**に現れる幾つかの非線形方程式に対しては, 問題2.9.8を見よ.

2階常微分方程式を研究するための相平面法への手引きとして

$$x_1(t) = u(t),$$
$$x_2(t) = u'(t)$$

とおき，x_1に対するx_2をプロットする．この方法は基礎的な単振動$u(t) = \sin t$に発想の源があって，これは明らかに相図上で円を描く（図1.9f）．非線形方程式に対する振動は，種々な点でこの相図からずれる．

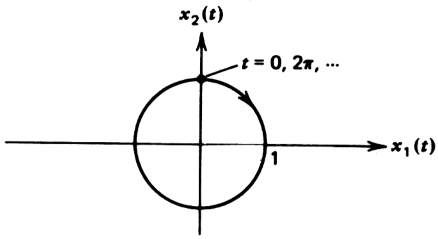


図 1.9f

非摂動のVan der Pol方程式は

$$u''(t) + u(t) = 0$$

に他ならず，その解は

$$u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$
$$= a \sin(t + \alpha)$$

である．ここで，c_1, c_2, a, αは通常の任意定数である．よって，この非摂動問題は図1.9fに描かれた相図をもつ．ただし，半径はaである．このとき，分岐理論の立場は，少なくとも小さなλに対して上の非摂動相図が非線形方程式に対する“**極限閉軌道**”の近似になるだろうことを示すことにある．

このことから，非線形方程式の解は**渦巻き形**をなすか，そうでなければ，上記の円形に近い軌道に引き寄せられる様になると期待される．後者の歪んだ閉じた輪あるいは“**極限閉軌道**”は非線形方程式の“**周期軌道**”を表す．これは，たとえVan der Pol方程式の厳密解が知られなくとも，実際に示され得ることである*)（図1.9g）．

*）例えば，次を見よ．S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1963).

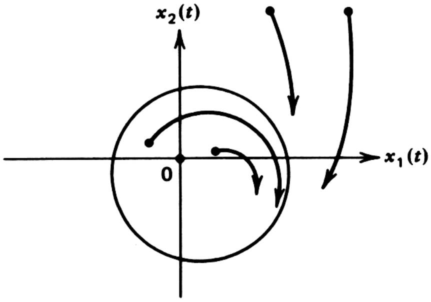


図 1.9g

これ以上,この問題に考察を加えると,本論から随分かけ離れてしまう恐れがある.強制項をもつVan der Pol方程式

$$u''(t) + \lambda(u^2(t) - 1)u'(t) + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 A \cos \omega t$$

に対して,幾つかの美しくかつ複雑な相図がSideriades*)によって得られている.一読に値するだろう.小さな演習問題を次に挙げておく.

問題. (a)初期近似解として$u(t)=a(t)\sin[t+b(t)]$をVan der Pol方程式に代入し,できるだけ多くの結論を導け.(b)$\lambda\neq 0$のとき,三角法を少々用いて,円形状の解の存在しないことを示せ.(c)$\int u^2=D(u)=\frac{1}{8}D(u^2)$の様な周期解に対する興味あるエネルギーに関する事実を確立せよ.ここで,積分は1周期についてとられる.

問題1.9.9 確認のための演習問題

読者は次章に移る前に,次の三つの演習問題を消化しなければならない.一層の活用のために,9番目の演習問題をも試みよ.

1. (a) d/dxと$\partial/\partial x$の線形性は,極限のどんな性質に依存するか?
   (b)次の作用素のうち,非線形なのはどれか?

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad Lu = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad Lu = e^{x^2 t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$Lu = \Delta_2 u + \int_0^{\pi} \sin x \cos y\, u(x, y)\, dy, \qquad Lu = \int_a^b u(y)\, dy,$$

$$Lu = \Delta u - u\int_{\Omega} u^2(y)\, dy, \qquad L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

*) L. Sideriades, "*Les solutions forcées de l'equation de Van der Pol*", *l'Onde Électrique*, **45** (Editions CHIRON, Paris, 1965), 1216-1224.

(c)　(可能な限り)(b)で示した作用素を，楕円型，放物型，双曲型として分類せよ．

2．(a)　積分記号のもとで微分できることを仮定して，

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi|t|}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} f(y)\,dy$$

が熱方程式

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad t \neq 0, \qquad -\infty < x < \infty$$

を満たすことを示せ．このとき，次の初期値問題(後退熱方程式)は初期データに関する安定性を欠くことによって，適切でないことを示せ．

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t < 0, \\ u(x,\ 0) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

(b)　次の初期値問題(Laplace方程式に対するHadamardのCauchy問題)は初期データの安定性を欠くため，適切でないことを示せ．

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{tt} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,\ t) = u(\pi,\ t) = 0, & t > 0, \\ u_t(x,\ 0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(x,\ 0) = f(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(c)　次の問題はなぜ適切でないか？

$$\begin{cases} -u'' - 25u = \sin 5x, & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

3．(a)　次の熱伝導問題を変数分離法によって形式的に解け(図1.9h)．

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,\ t) = u(\pi,\ t) = 0, & t > 0, \\ u(x,\ 0) = x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

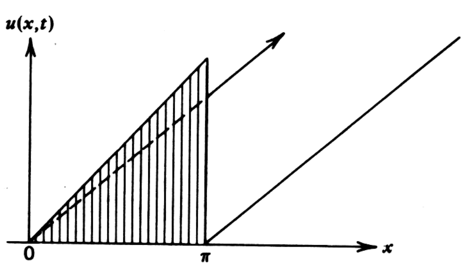


図1.9h

(*b*) 次のDirichlet問題を変数分離法によって形式的に解け(図1.9*i*).

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, & r < 1, \\ u(1, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & -\pi < \theta < 0. \end{cases} \end{cases}$$

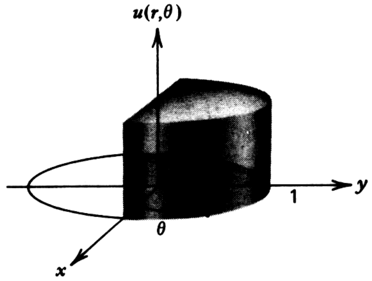


図 1.9*i*

(*c*) 次の波動方程式の問題を変数分離法によって形式的に解け(図1.9*j*).

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x/\pi, & 0 < x < \pi/2, \\ 1 - x/\pi, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases} \end{cases}$$

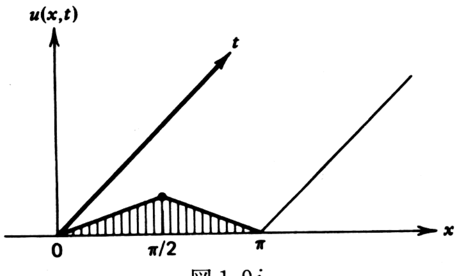


図 1.9*j*

(*d*) 節1.2, 問題1(*b*)のDirichlet問題を変数分離法によって形式的に解け.

(*e*) Dirichlet問題の一般論から, 上の(*d*)で得た解について何がわかるか？

次の問題は補足されるべき情報を含み, 内容にも難易度にも変化に富む.

4. (*a*) **Liouvilleの定理**によると, 全平面上の調和関数は定数でなければならない. すなわち, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$のとき, $u(x, y) = c$. ただし, Ωは全平面. このことを

示せ．

(*b*)　**Bernsteinの定理**によると，この平面上の極小曲面方程式$(1+(u_y)^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+(u_x)^2)u_{yy}=0$の$C^2$級解$u$は1次式でなければならない．すなわち，$u=ax+by+c$．これを示せ．

(*c*)　**Jörgenの定理**によると，重力理論における**薄片化構造方程式**(slicing equation) $u_{xx}u_{yy}-u^2{}_{xy}=1$の$C^2$級解$u$は2次式である．すなわち，$u=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$．これを示せ．

(*d*)　Bernsteinの定理はJörgenの定理から，またLiouvilleの定理がBernsteinの定理から導かれることを示せ．

5．本章の序文で述べた様に，極小曲面方程式

$$(1+(u_y)^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+(u_x)^2)u_{yy}=0 \tag{i}$$

は，変数変換によって，線形方程式

$$(1+\xi^2)w_{\xi\xi}+2\xi\eta w_{\xi\eta}+(1+\eta^2)w_{\eta\eta}=0 \tag{ii}$$

に変換され，さらに，これは線形Laplace方程式

$$v_{rr}+v_{ss}+v_{tt}=0 \tag{iii}$$

に変換される．これは，偏微分方程式の解曲面uをその接平面の包絡面とみなすという**Legendre変換**を用いてなされる．曲面$u(x,y)$は点$u_0(x_0,y_0)$で接平面$u-u_0=(x-x_0)u_x(x_0,y_0)+(y-y_0)u_y(x_0,y_0)$をもつことから，接平面の座標は($x_0$に対して)$u_x$，($y_0$に対して)$u_y$($u_0$に対して)$xu_x+yu_y-u$であることがわかる．これらを新しい変数に，すなわち，$\xi=u_x$, $\eta=u_y$, $\omega=xu_x+yu_y-u$とおくと，ξとηの関数としてωを用いたこの曲面が得られる．すなわち，曲面$u(x,y)$がわかると，ξとη，よってωがxとyの関数として知られる．更に，xとyは$x=\omega_\xi$と$y=\omega_\eta$からわかる．ここでのいわゆるLegendre変換は

$$\begin{cases} u(x,y)+\omega(\xi,\eta)=x\xi+y\eta, \\ \xi=u_x, \quad \eta=u_y; \quad x=\omega_\xi, \quad y=\omega_\eta \end{cases}$$

である．従って，**一般のLegendre変換**は次で与えられる．

$$\begin{cases} u(x_1,\ldots,x_n)+\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i, \\ \xi_i=u_{x_i}, \quad x_i=\omega_{\xi_i}, \quad i=1,\cdots,n. \end{cases}$$

(*a*)　上の変換(i)→(ii)→(iii)をLegendre変換論を用いて確かめよ．

(*b*)　一般の**Hamilton-Jacobi理論**について，また流体の流れの問題に対する**ホドグラフ法**について，さらに深く調べよ．

(*c*)　パラメータ曲面および非パラメータ曲面に対するDirichlet問題と極小曲面問題について，さらに深く考えよ*)．

6. (a) 平面内の領域Ω上の調和関数uは局所平坦でない．すなわち，uはどんな部分領域でも定数であり得ないということの厳密な証明をかき下ろせ．

(b) $\Delta u=0$でかつ$u\in C^2(\Omega)$ということでなく，uがこの領域上のすべての点P, Qに対して$u(P)=(2\pi r)^{-1}\oint_{|P-Q|=r} u(Q)ds$なる平均値の性質を満たすことだけを用いて，このことを証明せよ(この性質については節1.6.1で与えられた)．

7. (a) 次の非線形熱方程式の定常問題の解は$u=0$だけであることを示せ．

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} \ (-k(u)u_{,i})_{,i} = 0, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = 0 . \end{cases}$$

ここで，$k(\cdot)$は正値をとり，十分に滑らかである．

(b) これから，次の問題に対する一意性の結果がでるか？

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} \ (-k(u)u_{,i})_{,i} = F, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = f? \end{cases}$$

(c) 次の四つの問題に対して，一意性を手がけよ．

$$\text{(i)} \begin{cases} \Omega\text{内で} \ \Delta u - \int_\Omega u(y)\,dy = 0, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = f. \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} \Omega\text{内で} \ \Delta u - u\int_\Omega u^2(y)\,dy = 0^{\dagger)}, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = f. \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} \Omega\text{内で} \ \Delta u - u^3 = 0, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = f. \end{cases}$$

$$\text{(iv)} \begin{cases} \Omega\text{内で} \ \Delta u - u^2 = 0, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = f. \end{cases}$$

*) 最近の研究については次を見よ．J.Serrin, The solvability of boundary value problems (Hilbert's problem 19)；E. Bombieri, Variational problems and elliptic equations (Hilbert's problem 20), *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems* (American Mathematical Society, F. Browder (ed.), Providence, Rhode Island, 1976).

†) この型の非線形問題は(かなりずっと複雑であるけれども)量子力学の数値近似論に現れる．例えば，次を見よ．E. H. Lieb and B. Simon, "The Hartree-Fock theory of Coulomb systems", *Comm. Math. Phys.* **53** (1977), 185-194；K. Gustafson, "Recent progress on the nonlinear Hartree-Fock, concentration-diffusion, and Navier-Stokes equations", Proceedings of the Bielefeld Conference on Bifurcation Theory：*Applications of Nonlinear Analysis in the Physical sciences,* 296-309 (Pitman, London, 1981).

8. (a)　節1.8で議論した問題$|x|<1$で$\Delta u=e^{\lambda u}$, $|x|=1$で$u=0$を次の様におきかえて研究せよ．$n=1,2,3\cdots$に対して

$$\begin{cases} -(r^{n-1}u')' = \lambda r^{n-1}e^{u}, & 0<r<1, \\ u(1) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

(b)　これは，単位球上のもとの偏微分方程式の問題から，どの様にして得られるか？どんな仮定が加えられたか？

(c)　それを，節1.9.8の相図の方法によって研究せよ．

9. 次の演習問題は，第1章全般にわたる練習のために加える．

(1)分類せよ．

(a)　$u_{xx}+5u_{yy}-4u_{xy}$　(b)　$u_{xx}+4u_{yy}-4u_{xy}$

(c)　$u_{tt}+u_{xt}+u_{xx}$　(d)　$u_{tt}-4u_{xt}+u_{xx}$

(e)　$u_{xx}+2u_{yy}-2u_{xy}$　(f)　$u_y-u_{xx}-u_{yy}+2u_{xy}$

(g)　$u_{xx}+tu_{tt}$　(h)　$u_{xx}+(u_t)^3u_{tt}+u^3$.

(2)これらのうちの幾つか，例えば(e)，(f)を標準形に変形するための変換Cを求めよ．

(3)次の各関数のFourier三角級数表現を計算せよ．

(a) $(-\pi,\pi)$上　$f(x)=x$.

(b) $(-\pi,0)$上　$f(x)=-\pi-x$；$f(0)=0$；$(0,\pi]$ 上　$f(x)=\pi-x$.

(c) $(-\pi,\pi)$上　$f(x)=x^2(\pi-x)$.

(d) $(-\pi,0)$上　$f(x)=-x$；$(0,\pi)$上　$f(x)=x$.

(4) $(-\pi,\pi)$上　$f(x)=x$に対するFourier級数の第N部分和S_Nを考える．

(a)　$\varepsilon=0.5$および(b) $\varepsilon=0.15$に対して，$|f(\pi/2)-S_N(\pi/2)|<\varepsilon$を成り立たせる最小の$N$を見出せ．

(5) $[-\pi,0]$ 上　$f(x)=-\pi/4$, $(0,\pi)$上　$f(x)=\pi/4$とする．

(a)　Fourier級数を計算せよ．

(b)　その収束性を調べよ．

(c)　$x=\pi/2$とおいて，$1-1/3+1/5-1/7+\cdots=\pi/4$を示せ．

(d)　$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}=\pi^2/6$を示すための手段を見出せ．

(6)次の**線形性補助定理**を証明せよ：線形作用素Lに対して，次の二つの命題は同値である．(i) $Lu=0\Rightarrow u=0$.　(ii) 方程式$Lu=f$が高々一つの解をもつ．

(7) 次の問題に対して，解の一意性を示せ．

(a)
$$\begin{cases} x^2+y^2<1 \quad \text{内で} \quad \Delta u=3xy^3, \\ x^2+y^2=1 \quad \text{で} \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}+7u=x^8. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \Omega\text{内で} \quad \Delta u=F(x,y), \\ \partial\Omega\text{上の一部で} \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}=g(x,y), \partial\Omega\text{上他の部分で}\ u=f(x,y). \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u = F, \\ \partial\Omega\text{上} & \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{かつ(i)}\partial\Omega\text{上の1点}P\text{で}u(P)=3, \\ & \qquad\qquad \text{または(ii)}\oint_{\partial\Omega} u = 9. \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} \Omega\subset R^2\text{内で} & (e^x u_x)_x + (e^y u_y)_y = 8x^3 y \sin xy, \\ \partial\Omega\text{上} & u = x^2. \end{cases}$$

(8) 平均値の推論によって，次の各問題に対する $u(0,0)$ の値を決定せよ．

$$(a)\quad \begin{cases} r<1\text{で}\Delta u = 0, \\ \qquad u(1,\theta) = \begin{cases} 1, 0<\theta<\pi, \\ 0, \pi<\theta<2\pi. \end{cases} \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2<1\text{で} & \Delta u = 0, \\ x^2+y^2+z^2=1\text{上} & u = 1. \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x^2+y^2<1\text{で} & \Delta u = 0, \\ x^2+y^2=1\text{上} & u(x,y) = y^2. \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} \Omega = \{(x,y); -1<x<1, -1<y<1\}\text{とする．} \\ \Omega\text{内で} \quad \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{の一辺}x=1,\ -1\leqq y\leqq 1\text{上で} \quad u = 1, \\ \partial\Omega\text{の他の三辺上} \quad u = 0. \end{cases}$$

(9) 次の問題に対して，解の存在と一意性を考えよ．

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & \Delta u = kx^2 y, \\ \partial\Omega\text{上} & \partial u/\partial n = g(x,y). \end{cases}$$

ただし，$\Omega = \{(x,y); 0<x<4, 0<y<2\}$，$k=9/64$．$g(x,y)$ は下底 $(y=0)$ と左辺 $(x=0)$ 上で0，上辺 $(y=2)$ 上で $x/2$，右辺 $(x=4)$ 上で y の値をとる．解が存在するなら，変数分離法によってそれを構成せよ．

第2章

Fourier級数とHilbert空間

・・・同じ事柄を，再び・・・

厳密ではないが，偏微分方程式と付帯条件が与えられたとき，次が仮定されると，"ODEへの変数分離法"は常に試みられてよい．

(i)問題にしている領域Ωは，その境界$\partial\Omega$がある座標系の直線部分からなる様に，その座標系で表される．

(ii)PDEの作用素Lが実際に，個々の変数の関数に分離される．

(iii)領域Ωは有界である．

(iv)結果として得られるODEが可解である．

この様に，変数分離法の立場から偏微分方程式へ入ろうとすると，通常，(i)問題の有する領域Ωの形状に対して最も自然な座標系でその問題をかき，次に，(ii)試験的な解として関数$u(x_1, \cdots, x_m)=X_1(x_1)\cdots X_m(x_m)$を作るが，遂には(iii)これらの関数のFourier級数$u(x_1, \cdots, x_m)=\sum_n c_n u_n(x_1, \cdots, x_m)$を試みる．その中で，(iv)$X_k(x_k)$は分離されたODEと付帯条件を満たすものとして見出されている．これら手続き上の4点(i)−(iv)をもう少し詳しく議論しよう．

通常，領域は長方形，球，円柱形あるいはそれらの組合わせたものである．多くの問題で，Lは簡単な係数をもち，もし2階なら，分離されたODEは可解である*)．変数分離法によって解くことのできる無限領域問題もあるけれども†)，一般にその場合，問題の解を適当に表現するのに十分でない(あるいはとろうとする観点に依存し

*) この様な可解2階ODEの理論は通常"**特殊関数論**"と呼ばれ，それ自身数学の一分野であって，固有関数や関連関数として次の既知関数を含む：Bessel関数，Hankel関数，Legendre関数，Airy関数，超幾何関数，楕円関数，Theta関数，Gamma関数，Zeta関数，Lamé関数，Mathieu関数，Abel関数，Jacobi関数，Tchebycheff多項式，Neumann関数，Gegenbauer関数，Hermite多項式，Laguerre多項式，等々．古典的取扱いについては次を見よ．E.T.Whittaker and G.N. Watson, *Modern Analysis* (Cambridge Univ. Press,Cambridge,1902)．また，同伴Sturm-Liouville理論に対しては本書の節2.4参照．

て多すぎる）固有関数$X_k(x_k)$が存在する．物理学的にこの事は，時には固有値λ_nの離散集合に加えて，連続スペクトルによって生ずる影響をも示す．これらの無限領域問題に対しては，他の方法，例えばFourier変換やスペクトルの方法に頼ることになる．それらの話題については後で簡潔に扱われる（節2.7，節2.8参照）．

次に質問をしよう：なぜ変数分離法から導かれる特殊な類の常微分方程式のすべてを解くのか？なぜどの解も三角関数によって展開するのでもなく，最善を望まないのか？実際，多くの場合，Fourier三角関数展開の部分和で与えられた“近似”解を受け入れて，それで善しとする．しかしながら，それらの解は自然な関数から得られたものほど良いものでなく，誤差の見積りに困難があって，“物理学的に正しい”当てはめが失われている．

さらにこの点を強調するために，例として線形問題

$$Lu = F$$

を考え，Lの固有関数$\{\varphi_n\}$の他にも，関数集合$\{\psi_n\}$も試みられると仮定する．闇くもに

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n, \qquad F = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\psi_n$$

とかいて，形式的に方程式に代入すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n L\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\psi_n$$

を得る．$\{\psi_n\}$が厳密にLの固有関数$\{\varphi_n\}$であるときには，$L\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$．よって係数を等置して

$$c_n = d_n/\lambda_n.$$

これで形式解が求まる．$\{\psi_n\}$が自然に現れる固有関数$\{\varphi_n\}$以外のある関数であるとき，係数の等置をしてはいけない．作用素の真の固有関数を用いた展開が正しいことを示す良い例は，線形代数学の主要定理（**Jordan形式**）のそれである．すなわち，与えられたN対Nの１次変換は対角形式または殆んど対角形式で表現される基底$\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$を選ぶことができる．

本章はFourier級数とHilbert空間と名付けられている．本章の重要な使命は抽象的に，Fourier級数とHilbert空間が一つのものでかつ同じものだということを示す点にある．従って，もっと実用的な立場からまた偏微分方程式を解くためにも，概念的

†）特に，データが周期的のとき，本質的に半無限または有限の領域でのみ解かれ得る．ある意味でこの立場から無限領域を扱ったPDEの理論的研究については，次を見よ．L.Bers,F.John and M. Schechter,*Partial Differential Equations* (Wiley,NewYork,1964)．多くの有界でない領域は十分な連続スペクトルを生成し，よって固有関数展開法が最早や適切でなくなる．このことについては，I.M. Glazman,*Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators* (Islael Sci.Transl.Ltd.,Jerusalem,1965)．

に少々異なるが，次の各主題が結局は同じ基礎に立つ対象の手続きに関係するといってよかろう．

変数分離

Fourier(固有関数)展開

Hilbert空間表現

これらの理論の三つすべては，一般の

固有関数展開の方法

に含まれ，それはまた

最良の最小2乗あてはめの方法

の一部として述べられることもできる．

これらの主題のもつ意味や内容を理解することは重要である．しかしながら，それをするには，意味深い議論も要約を必要とし，まずそれから始めよう．

2.1 変数分離解の例

まず，変数分離法によって(形式的に)既に解かれた問題を振り返ろう．

振動弦問題(双曲型，長方形(図2.1a))：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

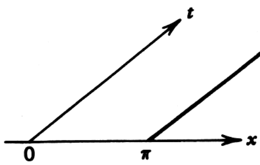


図 2.1a

解：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \cos nt, \qquad c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds.$$

Dirichlet問題(楕円型，長方形(図2.1b))：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = f_1(x), & 0 < x < \pi, \\ u(\pi, y) = f_2(y), & 0 < y < \pi, \\ u(x, \pi) = f_3(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, y) = f_4(y), & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

解：

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y),$$

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh n(\pi - y), \qquad c_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f_1(s) \sin ns\, ds,$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin ny \sinh nx, \qquad c_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f_2(s) \sin ns\, ds,$$

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh ny, \qquad c_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f_3(s) \sin ns\, ds,$$

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin ny \sinh n(\pi - x), \qquad c_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f_4(s) \sin ns\, ds.$$

Dirichlet問題(楕円型，円形(図2.1c))：

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad r < 1, \\ u(1, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

解：

$$u(r, \theta) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

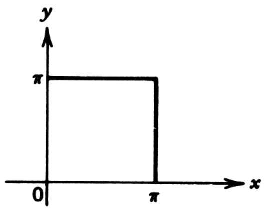


図2.1b

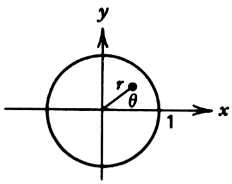


図2.1c

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns\, ds, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns\, ds.$$

固有値問題(楕円型，長方形(図2.1d))：

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} -\Delta u = \lambda u, \\ \partial\Omega\text{上}\ u = 0, \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

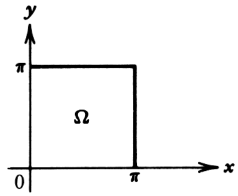


図 2.1d

解：

$$\text{固有値}\quad \lambda_{nm} = n^2 + m^2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad m = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$\text{固有関数}\quad \varphi_{nm} = \sin nx \sin my, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

以上の場合で，変数分離法は双曲型や楕円型の作用素に対して，長方形や円形の図形上での初期値問題，境界値問題，固有値問題およびこれらの混合について施された．放物型作用素は(後述の例参照)，領域Ωがx変数について有界であれば，同様である．

この方法で扱われてきた，あるいはそれが可能な同様の問題は無数に多くある．後でそのうちの幾つかを，それぞれの顕著な性質についての注意とともに掲げよう．

初めに，Ωの長さはかなり容易に変えられ，通常，都合のよい様にとることを述べておく．例えば，上の振動弦問題で，長さπのΩをlの長さに変えると，その解は次で与えられる

$$u_l(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n(\pi l^{-1})x \cos n(\pi l^{-1})t, \quad c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s) \sin n(\pi l^{-1})s\, ds.$$

同様に，半径Rの円上のDirichlet問題の解は

$$u(r, \theta) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (rR^{-1})^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

ただし，a_nとb_nは，θ-領域の長さが不変なので，前と同じFourier係数である．

同様にして，作用素に異なる係数が現れると，その解はFourier級数解で対応する変数を伸長させたものとなる．例えば，上の振動弦問題の波動方程式で，代わりに方程式

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

を考えると，このcは，x-領域の長さを変えないので，前同様解のt-部分にのみ現れ，c_nとxの部分は同じである．

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \cos nct.$$

上の正方形上のDirichlet問題がその線形性によって，データに関係して四つのより単純な問題にかかれたと全く同様に，他の問題にもこれと同様の線形性の分解が適用される．例えば，どこにも在りそうな非同次データをもつ振動弦問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x, t), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t),\ u(\pi, t) = \text{それぞれ}\ h_1(t), h_2(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

は，各問題につき一度だけ生じる0でないデータをもつ五つの問題にわけて，解けばよい．これらの個々の問題の幾つかは，経験上，他の問題を解くより困難である．たまに一つの問題が幸運にも解けて，$v = u + \varphi$の様な未知関数の変換によって，好ましからざる位置から他の位置にデータを置き変えることができても，この様なことは一般のデータに対してはそう起こらない*)．

非同次偏微分方程式が変数分離法によって，対応する固有値問題の固有関数を用いて，形式的にどの様にして解かれるかを，Dirichlet-Poisson問題を例にとって解説しよう．Ωを図2.1dの様にとる．

Poisson問題（楕円型，非同次）：

$$\begin{cases} \Omega\ \text{内で}\ -\Delta u = F(x, y),\ \text{ただし}\ F(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \sin nx \sin my,^{\dagger)} \\ \partial\Omega\ \text{上}\quad u = 0. \end{cases}$$

解：

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin nx \sin my, \qquad c_{nm} = \frac{d_{nm}}{n^2 + m^2}.$$

上の解の正しいことは次の様にして示される．変数分離法によって，対応する固有関数$\varphi_{nm} = \sin\ nx\ \sin\ my$をもつ固有値が$\lambda_{nm} = n^2 + m^2$，$n = 1$，2，3，…；$m = 1$，2，3，…であることは，上の固有値問題

$$\begin{cases} \Omega\ \text{内で}\ -\Delta u = \lambda u, \\ \partial\Omega\ \text{上}\ u = 0 \end{cases}$$

で見出されるから，

*) これが一般のクラスの作用素に対して可能なとき，この変数変換の方法はしばしば**Stokes**または**Duhamelの規則**あるいは**公式**と呼ばれる．この様な方法は波動方程式の取扱いで，大変有効である．

†) $F(x, y)$は1変数でなくて2変数の関数であるから，これはFの**2重Fourier級数**と呼ばれる．解も同じ形をもつ．

$$-\Delta u \overset{(\text{形式的に})}{\doteq} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(-\Delta)\varphi_{nm}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\lambda_{nm}\varphi_{nm} \overset{(\text{望む})}{\doteq} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}\varphi_{nm} = F$$

が得られ，これは$c_{nm}=d_{nm}/\lambda_{nm}$として求められる．ここで，項別微分演算すなわち，二つの極限演算

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{および} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}$$

の可換性を仮定した．これは前述の議論と同様に確かめられる*)．

第三の型の方程式(放物型)は変数分離法で同様にして解かれる．熱伝導の問題で解のt-成分は，物体が冷却していくとき，指数関数的に減衰する†)ことに注目せよ．すなわち，

熱伝導問題(領域は図2.1a)：

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

解：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin nx, \qquad c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\sin ns\, ds.$$

確認は簡単である．通常，$u(x, t)=X(x)T(t)$と試み，これを微分方程式に代入すると，λをある任意定数として，

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

*) そうでなければ勿論，Fに対する固有関数展開は有限項で終わる．そのときは線形性だけで十分である．例えば，$F(x, y)=\sin 2x \sin 307y + 5\sin 3x \sin 7y$のとき，解は

$$u(x, y) = \frac{1}{94253}\sin 2x \sin 307y + \frac{5}{58}\sin 3x \sin 7y.$$

†)物理学的には，適当な単位をとった均質物質の厚板線形化モデルに対応する．初期温度$f(x)$は厚板のすべての水平面で同一との仮定のもとで与えられ，板の境界面(左右の面)が0に冷却保持されている．この板は，頂部や底部の影響が無視される程に，十分に厚いとする．

固有値問題

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

から，いつもの通り，無限個の解$X_n(x)=$(定数)$\sin nx$と固有値$\lambda_n=n^2$（$n=1$, 2, 3, …）が得られる．さらに，1階線形常微分方程式

$$T'(t) + n^2T(t) = 0, \qquad t > 0$$

が対応し，解は$T_n(t)=$(定数)$\cdot e^{-n^2t}$．次に$u(x, 0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x)\,T_n(0)$を試み，前と同様に，$u(x, 0)$と$f(x)$に対するFourier級数展開とを結びつけて，$c_n$が決定される*)．

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \overset{(\text{望む})}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx = f(x).$$

最後に，上の楕円型や放物型の問題で論じた様に，長さや定数の異なる問題や解は容易に一般化される．例えば，熱伝導率k，幅lをもつ厚板の問題を考えると，

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

解は

$$u(x, t) = \sum c_n e^{-n^2(\pi l^{-1})^2kt} \sin n(\pi l^{-1})x,$$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s) \sin n(\pi l^{-1})s\, ds.$$

説明の殆んどは，特殊な固有関数それ自身，すなわちPDE問題の変数分離解のなす特殊固有関数の研究†)を除いて，上記と同じであるから，最小限の解説ですませよう．

振動膜問題(双曲型，長方形(図2.1e))：

$$\begin{cases} \Omega\text{内で } u_{tt} - \Delta u = 0, & t > 0, \\ \partial\Omega\text{ 上 } u = 0, & t > 0, \\ \Omega\text{内で } u(x, y, 0) = f(x, y), & \\ \qquad u_t(x, y, 0) = 0. & \end{cases}$$

*) これらの議論は前に与えたが，上のPoisson(非同次)方程式で与えた係数を整合させる手続きについて強調しておく．ここでは初期値問題の設定で，$c_n=d_n$の整合性は明白である．なぜなら，関連作用素が丁度$t=0$でuに作用する恒等作用素Iであることによる．

†) この種の研究は通常，特殊関数あるいはSturm-Liouville理論の中で行われる．ここでは，特殊なクラスの固有関数の，後で必要となる重要な性質のみに注目する．本章の当初につけた脚注およびその一般的理論の一部を述べている節2.4を参照せよ．

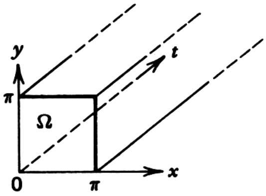


図 2.1e

解：

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin nx \sin my \cos(m^2 + n^2)^{1/2} t,$$

$$c_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(s, \tau) \sin ns \sin m\tau \, ds \, d\tau.$$

振動膜問題（双曲型，円形（図2.1f））：

$$\begin{cases} \Omega \text{内で}\ u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0, \\ \partial\Omega \text{上}\ u = 0, \quad t > 0, \\ \Omega \text{内で}\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \\ \qquad u_t(r, \theta, 0) = 0. \end{cases}$$

解：

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} J_0[(\lambda_n^0)^{1/2} r] \cos[(\lambda_n^0)^{1/2} t] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m[(\lambda_n^m)^{1/2} r]$$
$$\times [a_{nm} \cos m\theta + b_{nm} \sin m\theta] \cos[(\lambda_n^m)^{1/2} t],$$

$$a_{nm} = \frac{1}{d_{nm}} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(s, \psi) J_m[(\lambda_n^m)^{1/2} s] \cos m\psi \, d\psi \, s ds,$$
$$m = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$
$$n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$b_{nm} = \frac{1}{d_{nm}} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(s, \psi) J_m[(\lambda_n^m)^{1/2} s] \sin m\psi \, d\psi \, s ds,$$
$$m = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$
$$n = 1, 2, 3, \cdots.$$

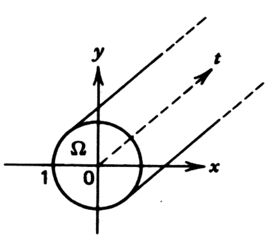


図 2.1f

d_{nm}は正規化因子で，

$$d_{nm} = \pi \int_0^1 J_m^2[(\lambda_n^m)^{1/2}s]s\,ds.$$

ここで，J_mは**第1種m次のBessel関数**，λ_n^mはJ_mの零点の2乗である．よって，$r=1$のとき，境界上で$J_m[(\lambda_n^m)^{\frac{1}{2}}r]=0$．さて，この解を求めるには，$u(r,\ \theta,\ t)=R(r)\cdot\Theta(\theta)T(t)$を試み，極座標系で$\Delta u=u_{rr}+r^{-1}u_r+r^{-2}u_{\theta\theta}$に注意すると，

$$\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + r^{-1}\frac{R'}{R} + r^{-2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$$

および

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \lambda r^2 = \frac{-\Theta''}{\Theta} = \nu$$

を得る．まず，Dirichlet問題について前に行った様に，固有値問題

$$\begin{cases} -\Theta'' = \nu\Theta, & -\pi < \theta < \pi, \\ \Theta(\pi) = \Theta(-\pi), \\ \Theta'(\pi) = \Theta'(-\pi) \end{cases}$$

を解いて，固有値$\nu=m^2(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と，対応する固有関数の対$\Theta_m=\cos m\theta$，$\sin m\theta$を得る．次に，$\nu=m^2$とおいた$\lambda$に対するBessel方程式の固有値問題が，$m$を固定して考えられ

$$\begin{cases} -R'' - r^{-1}R' + r^{-2}m^2R = \lambda R, & 0 < r < 1, \\ R(1) = 0, \\ R(0)\text{ および }R'(0)\text{は有界.} \end{cases}$$

これの解は$R_{mn}(r)=J_m[(\lambda_n^m)^{\frac{1}{2}}r]$ で，無限個の固有値λ_n^m(J_mの零点の2乗)$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をもつ*)．λ_n^mがこの様にして決定されたので，

$$\begin{cases} T'' + \lambda_n^m T = 0, & t > 0, \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

を解き，$\lambda_n^m>0$ゆえ，$T_n^m=$(定数)$\cdot\cos[(\lambda_n^m)^{\frac{1}{2}}t]$．

*) Bessel方程式は変数係数の方程式で，$r=0$に確定特異点をもつものとして通常述べられる型の方程式である．これらの方程式はODEの理論で，$\sum_{k=0}^{\infty}c_k r^{k+\rho}$の形式の解を求めるように扱われる．例えば，$m=0$に対する解として，$J_0(r)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}r^{2k}$，$c_{2k}=(-1)^k/(2^k k\,!)^2$．$J_0(r)$は図2.1$g$の様に振舞い，減衰余弦関数に似ていないこともない．初めの三つの固有値をあげると，$\lambda_1^0\cong 5.783186$，$\lambda_2^0\cong 30.471262$，$\lambda_3^0\cong 74.887007$．

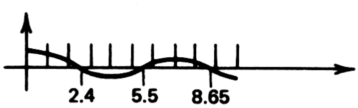


図2.1g

Dirichlet問題(楕円型，立方体(図2.1h))：

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上}\ \ u = f. \end{cases}$$

ただし，

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \sin nx \sin my.$$

解：

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin nx \sin my \sinh[(m^2 + n^2)^{1/2}(\pi - z)].$$

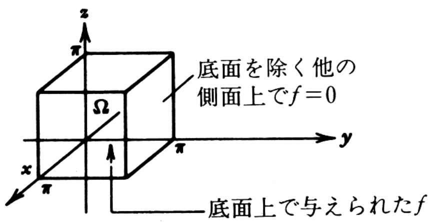


図2.1h

Dirichlet問題(楕円型，球形(図2.1i))：

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上}\ \ u = f. \end{cases}$$

ただし，

$$\Delta u = u_{rr} + 2r^{-1}u_r + r^{-2}(\sin\theta)^{-1}(\sin\theta u_\theta)_\theta + r^{-2}(\sin\theta)^{-2}u_{\varphi\varphi},$$

$$f(\theta, \varphi) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n0}P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)$$
$$\times [a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi], \qquad 0 < \theta < 2\pi, \qquad 0 < \varphi < \pi.$$

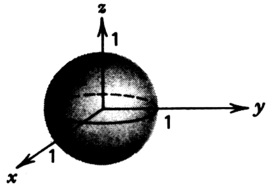


図2.1i

解：

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} r^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} r^n P_n^m(\cos\theta) \times [a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi].$$

ここで，P_n^mはいわゆる**Legendre陪関数**で，合成関数$r^n P_n^m(\cos\theta)\cdot(\cos m\varphi$または$\sin m\varphi)$は**球面調和関数**と呼ばれる．Legendre陪関数はLegendre多項式の導関数を用いて得られる*)．

熱方程式(放物型，任意のΩ(図2.1j))：

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} \ u_t - \Delta u = 0, & t > 0, \\ \partial\Omega \text{上} \ u = 0, & t > 0, \\ \Omega \text{内で} \ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

ただし，

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

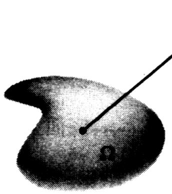


図 2.1j

解：

$$u(x, t) = \sum_n c_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x), \qquad c_n = \int_\Omega f\varphi_n\,dx \Big/ \int_\Omega \varphi_n^2\,dx.$$

ここで，$\varphi_n(x)$は次の固有値問題の固有関数である．

$$\begin{cases} \Omega \text{内で} \ -\Delta\varphi = \lambda\varphi, \\ \partial\Omega \text{上} \ \varphi = 0. \end{cases}$$

Ωは，$\varphi_n(x)$が高々可算的である†)様な領域を仮定してきたし，勿論変数分離法の様な通常の形式的な演算等を仮定してきた．その他に$\varphi_n(n=1, 2, 3, \cdots)$が完備性‡)をもつことも仮定された．この完備性については，次節で論じられる．

*) P_nはLegendre方程式，$-[(1-x^2)u_x]_x = \lambda u$, $-1<x<1$；両端点で$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}u_x$が有界，の固有値$\lambda_n = n(n+1)$, $n=0, 1, 2, \cdots$，に対応する固有関数であって，Bessel関数に似たべき級数法で見出される．P_nはn次多項式である．

†) すなわち，整数$n=1, 2, 3, \cdots$で番号づけられる．無限領域に対しては通常そうでない．

‡) この性質は固有関数$\varphi_n(x_1, \cdots, x_m)$を用いて，任意の適正なデータ$f$のFourier展開を保証する．

Ωが長方形のとき，上の例に従って，$\varphi_n(x)$は正弦関数すなわちそれらの積であるとわかる．球の場合，境界条件(上で行った様にDirichlet条件をとる必要はない)に応じて，Bessel関数，Legendre関数その他同様のものが現れる．柱体やある種の他の形状の場合も同様に操作して，陽的に展開関数φ_nを得ることができる．PDEの一般的理論はすべての好適な有界領域Ωに対してその存在を保証する．

本節を終えるに当たって，種々なPDE問題に現れる特殊常微分方程式を解く特殊固有関数の幾つかを挙げる*)．

Bessel方程式：

$$(xu')' - x^{-1}m^2u + \lambda xu = 0, \qquad u(0) < \infty, \qquad u(1) = 0.$$

固有値：$\lambda_n^m = (J_m\text{の零点})^2$(上を見よ)．

固有関数：$J_m(\lambda_n^{1/2}x)$　Bessel関数．

Legendre方程式：

$$((1 - x^2)u')' - (1 - x^2)^{-1}m^2u + \lambda u = 0, \qquad u(-1) < \infty, \qquad u(1) < \infty.$$

固有値：$\lambda_n = n(n+1)$，$n=0, 1, 2, \cdots$．

固有関数：$P_n^m(x)$　Legendre陪関数．

$$P_0^0 = 1, \qquad P_1^0 = x, \qquad P_2^0 = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3^0 = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x,$$

$$P_4^0 = \frac{7\cdot 5}{4\cdot 2}x^4 - 2\frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}x^2 + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}, \qquad P_5^0 = \frac{9\cdot 7}{4\cdot 2}x^5 - 2\frac{7\cdot 5}{4\cdot 2}x^3 + \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}x,$$

$$P_n^0(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n((x^2-1)^n)}{dx^n}, \qquad P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1 - x^2)^{m/2}\frac{d^{m+n}((x^2-1)^n)}{dx^{m+n}}.$$

Jacobi方程式：

$$((1 - x)^{p-q+1}x^q u')' + \lambda(1 - x)^{p-q}x^{q-1}u = 0, \qquad u(0) < \infty, \qquad u(1) < \infty.$$

固有値：$\lambda_n = n(n+p)$，　$n=0, 1, 2, \cdots$．

固有関数：$G_n(p, q, x)$　Jacobi関数(超幾何多項式)．

$$G_n(p, q, x) = (\text{定数})\cdot\left[1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k {}_nC_k \frac{(p+n)(p+n+1)\cdots(p+n+k-1)}{q(q+1)\cdots(q+k-1)}x^k\right]$$

*)ODEの作用する区間は境界条件から明らかである．もととなったPDEを見出すことは読者に残される．また与えられた解に対して与えられた方程式を解くことも，ODEの演習として興味をもつ読者に残される．

Tchebycheff方程式：

$$((1-x^2)^{1/2}u')' + (1-x^2)^{-1/2}\lambda u = 0, \qquad u(-1) < \infty, \qquad u(1) < \infty.$$

固有値：$\lambda_n = n^2$, $n=0$, 1, 2, ….

固有関数：$T_n(x)$　Tchebycheff多項式.

$$T_0(x) = 1, \qquad T_n(x) = 2^{-(n-1)}\cos(n\cos^{-1}x).$$

Hermite方程式：

$$(e^{-x^2}u')' + \lambda e^{-x^2}u = 0, \qquad u(\pm\infty) = O(x^{\text{ある}N}).$$

固有値：$\lambda_n = n$, $n=0$, 1, 2, ….

固有関数：$H_n(x)$　Hermite多項式.

$H_0 = 1$,　$H_1 = 2x$,　$H_2 = 4x^2 - 2$,　$H_3 = 8x^3 - 12x$,　$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\, d^n(e^{-x^2/2})/dx^n$　(交代方程式: $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$).

調和振動子方程式：

$$u'' - \frac{x^2}{4}u + \lambda u = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x)\,dx < \infty^{*)}.$$

固有値：$\lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $n=0$, 1, 2, ….

固有関数：$\varphi_n(x) = e^{-x^2/4}H_n(x)$　Hermite関数($H_n(x)$に対しては上記).

Laguerre方程式：

$$(xu')' + (\alpha - x)u' + \lambda u = 0, \qquad \int_0^{\infty} u^2(x)x^{\alpha}e^{-x}\,dx < \infty.$$

固有値：$\lambda_n = n$, $n=0$, 1, 2, ….

固有関数：$L_n^{\alpha}(x) = \dfrac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\dfrac{d^n(e^{-x}x^{n+\alpha})}{dx^n}$　Laguerre 多項式,

$L_0 = 1$,　$L_1 = 1 - x$,　$L_2 = x^2 - 4x + 2$,
$L_3 = -x^3 - 9x^2 - 18x + 6$　(交代方程式: $(xe^{-x}u')' + \lambda e^{-x}u = 0$).

*)　次の二つの仕方のいずれかで境界条件が課せられる.(i)上例の様に境界である種の成長率または有限性を要求する.(ii)この例で示された様にL^2空間の固有関数を要求する.$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2{}_n(x)dx<\infty$の条件は$\int_{-\infty}^{\infty}H_n{}^2(x)e^{-x^2/2}dx<\infty$に相当する.初めにかかれたHermite方程式はいわゆる**Sturm-Liouville形式**で表され,別表現としたものは**ODE形式**と呼ばれる.**正規形式**と呼ばれる第三の標準形式があるが,それについては,節2.4問題1を見よ.

Whittaker方程式$(\alpha>-1)$：

$$u''-\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha^2-1}{4x^2}\right)u+\lambda x^{-1}u=0,\qquad \int_0^\infty u^2(x)x^{-1}dx<\infty.$$

固有値：$\lambda_n=n+\dfrac{\alpha+1}{2},\qquad n=0,1,2,\cdots.$

固有関数：$\varphi_n(x)=\left(\dfrac{n!}{(n+\alpha)!}\right)^{1/2}x^{(\alpha+1)/2}e^{-x/2}L_n^\alpha(x)$　Whittaker関数

($L_n^\alpha(x)$に対しては上記).

Balmer方程式：

$$\tfrac{1}{2}u''+x^{-1}u'+\left(Zx^{-1}-\frac{l(l+1)}{2}x^{-2}\right)u+\lambda u=0,$$

$$\int_0^\infty u^2(x)x^2dx<\infty,\qquad l=0,1,2,\cdots.$$

固有値：$\lambda_n=-\dfrac{Z^2}{2n^2},\qquad n=1,2,3,\cdots.$

固有関数：$R_{nl}(x)$　水素原子に対する動径関数(Z=1).

$$R_{10}=2e^{-x},\qquad R_{20}=2^{-1/2}e^{-(1/2)x}\cdot(1-\tfrac{1}{2}x),$$

$$R_{30}=\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{-(1/3)x}\cdot(1-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{2}{27}x^2),$$

$$R_{40}=\tfrac{1}{4}e^{-(1/4)x}\cdot(1-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{1}{192}x^3),$$

$$R_{nl}(x)=e^{-(Z/n)x}\cdot x^lL_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zx}{n}\right).$$

次の三つの問題は，特別の問題へ変数分離法を適用することについて，読者の復習を新たにし，かつ促すのに役立つであろう．問題2.9.1で，読者はテンソル積としての変数分離法のより抽象的な解釈に出会うだろう．

問題1.(a)次の振動弦問題を形式的に変数分離法で解け(図2.1k).

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<\pi,\quad t>0,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=0, & 0<x<\pi,\\ u_t(x,0)=g(x), & 0<x<\pi. \end{cases}$$

(b)区間〔0, π〕上の関数$g(x)$を，$g(x)=1$, $\pi/3\leqq x\leqq 2\pi/3$；$g(x)=0$, 他のx, とする場合の解を描いてみよ．

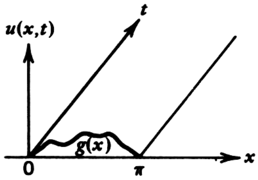


図 2.1k

問題2. (a) 次のDirichlet問題を形式的に変数分離法で解け(図2.1l).

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \\
u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi, \\
u(\pi, y) = 0, & 0 < y < \pi, \\
u(x, \pi) = 0, & 0 < x < \pi \\
u(0, y) = y, & 0 < y < \pi.
\end{cases}
$$

(b) 解を描いてみよ.

問題3. (a) 次の熱方程式を形式的に変数分離法で解け(図2.1m).

$$
\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\
u(x, 0) = 0, & 0 < x \leqq \pi/2, \\
u(x, 0) = 1, & \pi/2 < x \leqq \pi, \\
u(0, t) = 0, & t > 0, \\
u(\pi, t) = 0, & t > 0.
\end{cases}
$$

(b) Fourier級数解uは，直線$x=0$, $x=\pi/2$, $x=\pi$の上およびその近くでどう振舞うか？　(c) 解を描いてみよ.

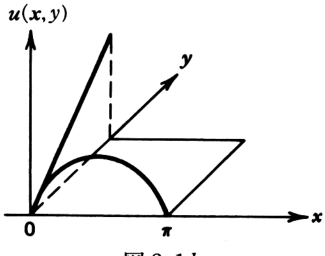


図 2.1l

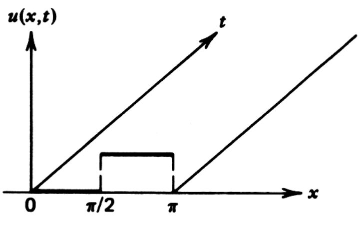


図 2.1m

2.2　方法の数学的正当性

Hilbert空間の立場からFourier級数に進む(節2.3)前に，本節で変数分離法の厳密な正当化に関して，節1.5で示した三つの疑問を振返ろう．すなわち，差当たって，変数分離法とその結果得られるFourier級数(形式)解を受入れて，それの偏微分方程式への代入を実行できる条件を見出すことだけを考えよう．十分に連続な関数だけに注目すると，微積分学や高等微積分学の方法のみで用は足りる．大まかにいって，この事はより効果的なHilbert空間ノルムではなく，最大値ノルムで遂行することに相当する．

1.Fourier級数解で項別微分は可能か？

2.Fourier級数解は，領域や境界上で与えられたデータに点別等置を保証するか？

3.Fourier級数解は，単なる“物理学的な”解なのか？

前に述べた様に，疑問3は(i)物理学的観点から十分な正則性をもつ関数のクラスの範囲内で高々一つの解を示す一意性の証明，および(ii)Fourier級数解に対する正則性の程度を示すことによって解決される．疑問2はDini判定(節1.6.3，節1.9.6.2参照)に帰着され，本節のあとの方で議論される．疑問1に関し，微積分学と高等微積分学から，項別に級数を微分するための十分条件は十分な一様収束性を示すことで与えられることが知られており，ここで立ち戻ることにする．

まず，本節の内容を示すために，二つの発見的な注釈から始めよう．

節1.6.3で述べた一様収束定理から明らかな様に，一様収束の概念は最大値ノルムでの収束概念である．この様に，最大値原理が一様収束性を示すときにその役割を演ずることができれば(そしてそうだろう)とみることは不当なことでない．最大値原理は楕円型偏微分方程式に対して最も強く，双曲型方程式で最も弱い．それゆえ，初めに楕円型問題に対して変数分離解の一様収束性の証明を説明しよう．

次のそして関連する注釈は既に見てきた様に，楕円型問題(例えば，平均値の性質によって)や放物型問題(例えば，Poisson表現公式によって)の解はたとえ悪いデータであっても，境界を離れると，直ちに滑らかになることである．このことは一様収束性の証明を容易にしてくれる．双曲型方程式の解は滑らかにならず，実際そうあることを望んではいけないだろう．なぜなら，波は波のまま，衝撃は衝撃のままで伝わるだろうから*)．

これら二つの理由で，変数分離法の正当性の証明は楕円型と放物型の場合はより容易であり，データの正則性を大して要求しない．

さて，上記の注釈に続いて，三つの型の問題に対する変数分離のFourier解の正当性の証明を与えよう．

*)　ここでのこの発見的な注釈は線形的直観に基づいた．非線形方程式については，衝撃や他の解の不連続は型に依らず発達することが可能である．この種の最近の概観については次をみよ．P.D.Lax,The formation and decay of shock waves,*Amer.Math.Monthly*,**79**(1972), 227-241.

Dirichlet問題(図2.2a)

$$\begin{cases}\Omega\text{内で}\Delta u = 0, \\ u = f\ (0 \leqq x \leqq \pi, \quad y = 0), \\ u = 0\ (\text{他の辺上}).\end{cases}$$

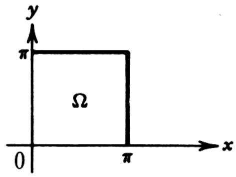


図 2.2a

変数分離法による形式解は

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh n(\pi - y), \qquad c_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi}\int_0^{\pi} f(s) \sin ns\, ds.$$

収束性を証明するために，この解を次の様にかこう．

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n(x, y) = \lim_{N\to\infty} s_N(x, y).$$

微積分学のWeierstrass$M$-判定を適用するには，$\sum u_n$を$|u_n(x, y)| \leqq M_n$の意味で，$\sum M_n$によって押さえることが必要である．項別に微分するには(節1.6.3を見よ)，同様に$\sum u_n'$を$\sum M_n'$で，また$\sum u_n''$を$\sum M_n''$で押さえる必要がある．　次の質問から始めよう．この級数のxに関する微分演算は厳格に行えるのだろうか？すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x} u_n(x, y).$$

直ちに，次の有界性を得る．

$$\begin{aligned}|u_n(x, y)| &\leqq |c_n|\,|\sinh n(\pi - y)| \\ &\leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(s)|\,ds \cdot \left|\frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi}\right| \leqq (\text{定数})e^{-ny}.\end{aligned}$$

ここで，次の関係が用いられた*)．

$$\begin{aligned}\frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} &= \frac{e^{n\pi}e^{-ny} - e^{-n\pi}e^{ny}}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} \\ &= e^{-ny}\frac{(1 - e^{-2n(\pi - y)})}{(1 - e^{-2n\pi})} \leqq \frac{1}{(1 - e^{-2\pi})}e^{-ny}.\end{aligned}$$

*) $\sinh u = (e^u - e^{-u})/2$を思い出せ．

また，$f \in L^1(0,\ \pi)$，すなわち

$$\int_0^\pi |f(s)|\, ds = M < \infty$$

の仮定もなされた．yの値Yを任意に小さいが正に固定して，図2.2bに示す閉集合$\overline{\Omega}$上での一様収束の可能性を考えよう．

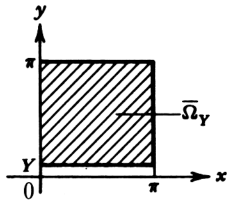


図 2.2b

$$M_n = (\text{定数})\, e^{-nY} = \frac{2\int_0^\pi |f(s)|\, ds}{\pi(1 - e^{-2\pi})} e^{-nY}$$

とおくと，上記の有界性から，$\overline{\Omega}_Y$内のすべての点$(x,\ y)$に対して

$$|u_n(x,\ y)| \leqq M_n\ .$$

よって[*]，Weierstrass$M$-判定から，$\sum u_n(x,\ y)$は$\overline{\Omega}_Y$の各点で実際に一様に収束する．項別微分法に対しては，実数の収束級数$\sum M_n'$から，$|\partial u_n(x,\ y)/\partial x|$がある$M'_n$によって押さえられる必要がある．ところが

$$\frac{\partial u_n(x,\ y)}{\partial x} = nc_n \cos nx \sinh n(\pi - y)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x,\ y)}{\partial x^2} = -n^2 c_n \sin nx \sinh n(\pi - y)$$

であるから，M'_nとM''_nをnM_nとn^2M_nにとればよく，比判定法によってM_nと同様の収束級数になる．よって[†]，$\overline{\Omega}_Y$の到る所で，項別に適用することにより，作用素$\partial/\partial x$をこの級数に適用することができる．更に，$\sum \partial u_n(x,\ y)/\partial x$を収束級数とみなして，再び$\partial/\partial x$を項別に適用できて，次を得る．

*) ここでの要点は$\sum u_n$すなわち共通項が定数でない$\sum e^{-nY}$が，$M_{n+1}/M_n = e^{-Y} < 1$であるから，微積分学の比判定法により，$Y > 0$に対して収束することである．

†) 関数解析のより進んだ課程の立場では，これは微分作用素$\partial/\partial x$が，$s_N \xrightarrow{\text{一様に}} u$で$(\partial/\partial x)\, s_n \xrightarrow{\text{一様に}}$ "あるもの" とするとき，その "あるもの" が必然的に$(\partial/\partial x)\, u$であるとの意味で，**閉作用素**であることを意味する．閉作用素の概念は**連続な作用素**のそれに比して弱い．後者は積分作用素によって，また$s_N \xrightarrow{\text{一様に}} u$のとき$\int s_N \to \int u$なる事実(問題2.9.2および問題2.9.5参照)によって，最もよく例証される．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x, y).$$

yに関する微分演算も同様にして行われる.

$$\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = -nc_n \sin nx \cosh n(\pi - y),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_n(x, y) = n^2 c_n \sin nx \sinh n(\pi - y)$$

であるから，$M_n = M'_n = M''_n = 2$(定数)$n^2 e^{-nY}$ととることができる．ここで，定数は上と同じもの，n^2は三つの級数$\sum u_n$，$\sum u'_n$，$\sum u''_n$すべてに係っており，余分にある係数2は，1階導関数項の級数で

$$\frac{\cosh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} = e^{-ny}\frac{(1 + e^{-2n(\pi - y)})}{1 - e^{-2n\pi}} \leqq \frac{2}{(1 - e^{-2\pi})} e^{-ny}$$

にもとづく. 従って, 再び*) Weierstrass$M$-判定法によって, 項別微分演算の正しいことが示される.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_n(x, y).$$

よって，データに対し$f \in L^1(0, \pi)$，すなわち$\int_0^\pi |f(s)|ds < \infty$を仮定して

$$\Delta u = \Delta \sum u_n = \sum \Delta u_n = 0.$$

$u_n(x, y)$のそれぞれが他の三辺上で0であるから, 級数$u = \sum u_n$についても同様であることに注意する. また(節1.6.3で述べた様に)，一様連続な関数列の極限は連続であるから，上の議論によって，$u(x, y) \in C^2(\Omega)$ (任意の$Y > 0$に対して$u \in C^2(\overline{\Omega}_Y)$ゆえ), そしてまた，$(x, y)$が$\Omega$の他の三辺上の任意の境界点に近づくとき$u(x, y) \to 0$である．実際，上の微分法の議論は何回繰返されてもよく，すなわち$u(x, y) \in C^\infty(\Omega)$．この事は勿論，$u$が調和，よって解析的である事実から知られることでもある. 本節の当初に掲げた三つの質問に対する答えに未だ残されているのは, “データ” の線分$y = 0$，$0 \leqq x \leqq \pi$上でのuの正則性の研究だけである.

後々のために, Dini判定(節1.6.3および問題1.9.6参照)を要請し, fが連続的に可微分(すなわち，$f \in C^1[0, \pi]$)および$f(0) = f(\pi) = 0$を仮定する．すると，変数分離法による構成が，$f(x)$に対するFourier級数と$u(x, 0)$とを等置させ,

*)　$\sum M_n$は，十分に大きなnに対して$M_{n+1}/M_n = (1 + 2/n + 1/n^2)e^{-Y} < 1$ゆえ，比判定法により，やはり収束する.

$$u(x,\,0) = \sum u_n(x,\,0) \equiv \sum d_n \sin nx, \qquad d_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\sin ns\,ds.$$

よって，$0 \leqq x \leqq \pi$上どこでも$u(x,\ 0)=f(x)$．そして，更にここで示した様に，fについて改めて仮定した正則性によって，そのFourier級数$\sum d_n \sin nx$が〔0, π〕上で$f(x)$に一様収束することがわかる．これはCauchyの収束判定法によると，任意の$\varepsilon>0$に対して，十分に大きなMとNで

$$|s_M(x,\,0) - s_N(x,\,0)| < \varepsilon$$

が保証されることになる．何故ならば，ある与えられたMと$N\,(M>N)$に対して

$$\Delta(s_M(x,\,y) - s_N(x,\,y)) = \Delta\left(\sum_{N+1}^{M} u_n(x,\,y)\right) = \sum_{N+1}^{M} \Delta u_n(x,\,y) = 0$$

であるから，領域Ω上で関数

$$v(x,\,y) = s_M(x,\,y) - s_N(x,\,y)$$

に最大値原理を適用すると，

$$\max_{\overline{\Omega}}|v(x,y)| \leqq \max_{\partial\Omega}|v(x,\,y)|.$$

よって

$$|s_M(x,\,y) - s_N(x,\,y)| < \varepsilon, \qquad (x,\,y) \in \overline{\Omega}.$$

これはCauchyの判定法によって，$s_N(x,\ y)$が$\overline{\Omega}$上で$u(x,\ y)$に一様に収束することを意味する．特にこのとき，$u(x,\ y)$は連続関数の和$s_N(x,\ y)$の一様に収束する列の極限であって，よって$\overline{\Omega}$上それ自身連続である．よって任意の経路に沿って点$(x,\ y)$を$(x_0,\ 0)$に近づけるとき(図2. 2c)，$u(x,\ y)\to u(x_0,\ 0)=f(x_0)$．

よって，すべて四辺上に存在するデータをもつDirichlet問題の変数分離解$u(x,y)=\sum u_n$に対して上で得られたものをまとめて示すと，図2.2dのようになる．

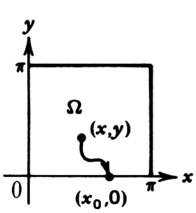


図 2.2c

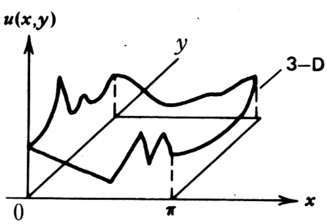


図 2.2d

問題(Dirichlet):

$$\begin{cases} \Omega\text{内で}\ \Delta u = 0, \\ \partial\Omega\text{上}\ \ u = f\,, \\ f \in C^0(\partial\Omega), \qquad f \in PC^1(\partial\Omega), \\ f(0,0) = f(\pi,0) = f(\pi,\pi) = f(0,\pi).^{*)} \end{cases}$$

解答（六個の疑問に対して）：

(1)存在（変数分離解$u=\sum u_n$が解であるという上の判定による）

(2)一意性（$C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$の関数の間で，最大値原理による）

(3)安定性（最大値ノルムで）

(1′)構成（$u=\sum u_n$）

(2′)正則性（$u\in C^\infty(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$）

(3′)近似（uはs_N部分Fourier級数の，点別かつL^2収束の意味での極限）.

第二の場合（すなわち，放物型）の証明は，優級数$\sum M_n$, $\sum M'_n$, $\sum M''_n$が勿論異なって現われるけれども，同様になされる．熱の初期値境界値問題が演習問題として残される（次の問題1）．やはり，方程式によってデータが直ちに解の中で滑らかにされ，一様収束性が容易に示される．

第三の型（すなわち，双曲型）の方程式はデータを滑らかにしない．鋭い波形の衝撃は鋭い波を生ずることが要請され，よって滑かさは期待できない．この様に，データの不連続性は解においても保存され，一様収束の判定はそれ程容易でない．更に，データに対するFourier級数から，解に対するFourier級数への一様収束性を議論すべき最大値原理はない．

けれども今までと同様にして，問題すなわち双曲型の波動初期値境界値問題に対する変数分離のFourier解の正当性を証明してみよう．そのために，データには十分なだけの正則性を仮定する†).

振動弦問題（図2.2e）

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geqq 0, \\ u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ \text{ここで} \\ f \in C^4[0,\pi]\ \text{および} \\ f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0. \end{cases}$$

*) このかどでのかなり人工的な制限は，任意の与えられたかどでの値に当てはまる関数$a_0+a_1x+a_2y+a_3xy$を解から差し引いて，除かれ得る．一般に，不連続関数のFourier級数表現は，跳躍点でその平均値に収束すると期待される．

† 僅かながら多めに仕組んだ議論によって，$f\in C^2[0,\ \pi]$ と $f(0)=f(\pi)=f''(0)=f''(\pi)=0$で十分である．これは節2.5で議論される様に問題への“Green関数”法から，最も容易にわかる．

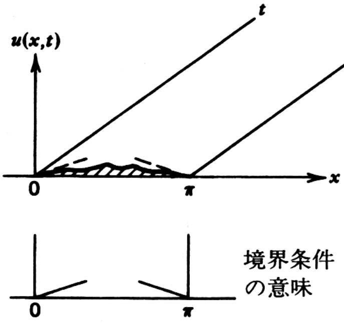


図 2.2*e*

変数分離法による形式解は

$$u(x,\,t)\;=\;\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{c_n\sin nx\cos nt}_{u_n(x,\,t)},\qquad c_n\;=\;\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(s)\sin ns\,ds$$

であった．優級数を見出すために，まず次に注目する．

$$|u_n(x,\,t)|\leqq|c_n|,\qquad\left|\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,\,t)\right|\leqq n|c_n|,\qquad\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,\,t)\right|\leqq n^2|c_n|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,\,t)\right|\leqq n|c_n|,\qquad\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n(x,\,t)\right|\leqq n^2|c_n|.$$

級数の収束性から$M_n\sim|c_n|$，$M'_n\sim n|c_n|$，$M_n''\sim n^2|c_n|$と強要するために，データfの何らかの正則性がそのfに対するFourier係数c_nの十分急激な減少に影響されているかどうかを，部分積分して*⁾確かめよう．$f\in C^4[0,\,\pi]$，$f(0)=f(\pi)=0$が仮定されたので，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f(s)\sin ns\,ds\;&=\;\frac{1}{n}\int_0^{\pi}f'(s)\cos ns\,ds\\&=\;-\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}f''(s)\sin ns\,ds\\&=\;\frac{f''(\pi)(-1)^n-f''(0)}{n^3}-\frac{1}{n^3}\int_0^{\pi}f'''(s)\cos ns\,ds\\&=\;\frac{f''(\pi)(-1)^n-f''(0)}{n^3}+\frac{1}{n^4}\int_0^{\pi}f''''(s)\sin ns\,ds.\end{aligned}$$

*) 偏微分方程式の取扱いで，一度やってみてわかる様に，部分積分はしばしば手掛かりとなる．この計算法の意味は他の表現で，すなわち，微分された関数$f'(x)$のFourier余弦係数が与えられた関数$f(x)$のFourier（正弦）係数c_nを用いてnc_nであると，述べられることである．同様に関数$f''(x)$のFourier（正弦）係数c''_nは$-n^2c_n$である．後者の部分積分法によって，Fourier変換の利用に手掛かりが与えられ（節2.7.3参照），その変換のもとで$d^2u/dx^2\to -k^2u$すなわち，$F(d^2u/dx^2)=-k^2F(u)$なる演算が可能である．ここで，FはFourier変換を示し，kはこの本文のnと同様の役割を演ずる実変数である．

また，$f''(0)=f''(\pi)=0$も仮定されているので*)，次の評価ができる．

$$|u_n(x,t)| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f''(s)|\,ds\cdot\frac{1}{n^2},\qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f'''(s)|\,ds\cdot\frac{1}{n^2},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,t)\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f''''(s)|\,ds\cdot\frac{1}{n^2},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f'''(s)|\,ds\cdot\frac{1}{n^2},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n(x,t)\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f''''(s)|\,ds\cdot\frac{1}{n^2}.$$

よって，M_n, M_n', M_n''を上の不等式の右辺に等しくとり，$\sum(1/n^2)$が収束することに注目すると†)，Weierstrass$M$-判定法によって，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sum u_n(x,t) = \sum\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_n(x,t) = 0.$$

よって，波動方程式を満たしている．変数分離法によって，境界条件は満たされる．上の収束が$0\leqq x\leqq\pi$と$t\geqq 0$に対してどこでも一様であるから，解$u(x,t)\in C^2[0,\ \pi]\times[0,\infty)$，すなわち$0\leqq x\leqq\pi$と$t\geqq 0$に対して保証される．よって，次の疑問に対しては肯定的に解答が与えられた：(1)**存在**，(1')**構成**，(2')**正則性**，(3')**近似**．さらに，(2)一意性と(3)安定性に関しては，次の問題3のエネルギー法で示される．

問題1.　熱伝導問題(図2.2f)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0\leqq x<\pi,\quad t>0,\\ u(x,0)=f(x), & 0\leqq x\leqq\pi,\\ u(0,t)=0, & t\geqq 0,\\ u(\pi,t)=0, & t\geqq 0\end{cases}$$

に対する変数分離解を，次の二つの方法によって，数学的に正当化せよ：

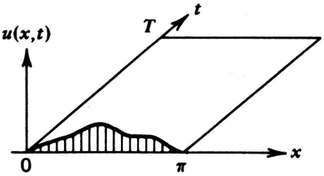


図 2.2f

(a)先のDirichlet問題で行った様な，最大値原理とDini判定の使用．$f\in C^1[0,\ \pi]$と$f(0)=f(\pi)=0$を仮定せよ．まず，熱方程式の最大値原理とは，熱方程式に対する滑らかな解は，初期値であるいは境界でのいずれかで，その最大値と最小値(例えば温

*)　この仮定は，次の問題2のために，上記計算には用いられていない．
†)　例えば，微積分学の積分判定法．

度の)をとることであった．もっと精密に述べると，$u\in C^2([0,\ \pi]\times[0,\ T])$．すなわち，$u$がこの図の領域上で2回連続微分可能で，その領域の内部で$u_t-u_{xx}=0$を満たすとき，任意の$T>0$に対して

$$\max_{\substack{0\leqq x\leqq\pi\\0\leqq t\leqq T}}|u(x,\ t)|\leqq\max\{\max_{0\leqq x\leqq\pi}|u(x,\ 0)|,\ \max_{0\leqq t\leqq T}u(0,\ t),\ \max_{0\leqq t\leqq T}u(\pi,\ t)\}$$

(b)　先の振動弦問題で行った様な，fに関する過剰正則性の使用，すなわち$f\in C^4[0,\ \pi]$と$f(0)=f(\pi)=f''(0)=f''(\pi)=0$を仮定せよ．

問題2.　先の部分積分法で，項$[f''(\pi)(-1)^n-f''(0)]/n^3$を調べよ．$(a)$項$(-1)^n/n$をもつ級数が収束するので，$f''(0)=0$だけを要請する議論で，何が悪いのか？　(b) $f''(\pi)$と$f''(0)$のどんな値に対して，この項が0であるのか？　(c)　$f(x)$を$-\infty<x<\infty$のすべてのxに拡張するのに必要な他の解法に関連した疑問は次である．$f\in C^2[0,\ \pi]$と$f(0)=f(\pi)=0$が与えられ，0とπのまわりで奇関数的にかつ周期的にできるだけ拡張して，$f\in C^2(-\infty,\infty)$とするならば，必らず$f''(0)=f''(\pi)=0$となるか？

問題3　全エネルギー汎関数

$$E(t)\equiv E(u(t))=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[\left(\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right)^2\right]dx$$

を用いて，次の振動弦問題に対する一意性と安定性の結果を示せ．

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<\pi, \quad t>0,\\ u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,\ 0)=f(x), & 0\leqq x\leqq\pi,\\ u_t(x,\ 0)=g(x), & 0\leqq x\leqq\pi.\end{cases}$$

図2.2fに示された閉T領域上で$u\in C^2$を仮定し，積分記号のもとでの微分法，発散定理，Schwarz不等式その他何でも用いよ．

2.3　Fourier級数とHilbert空間

本節では，まずHilbert空間を公理的に述べ，次にFourier級数を用いてそれが何を意味するかについて説明しよう．主な結果は定理Hで与えられる．節2.4で，Hilbert空間に関連する本節を，変数分離法および様々に派生する重要なHilbert空間に結びつける．それらの多くは前に与えた例(節2.1)に対応する．

節2.2は微積分学や高等微積分学の方法のみに依存する様に見えたかも知れないが，部分積分法の計算やDini判定の証明で暗黙に示した直交性の議論に，Hilbert空間の方法がまた含まれていたことに注目しなければならない．この様に，Fourier級数がかかれたときはいつでも，好むと好まざるとにかかわらず，Hilbert空間で考えているといっても過言ではない．

Hilbert空間の構造は，次の四つの舞台で作り上げられる．

代数学的
位相数学的
解析学的
幾何学的

これらは以下の様に

線型空間
線形ノルム空間
完備線形ノルム空間
完備線形内積ノルム空間

の概念を用いて述べられ，かつ対応する例題の教訓的な結果は次のものである．

$0 \leqq x \leqq \pi$上の連続関数全体*)，$C[0,\ \pi]$，

RMSノルム†) $\| u \| = [\int_0^\pi | u(x) |^2 dx]^{1/2}$をもつ$C[0,\ \pi]$，

最大値ノルム $\| u \| = \max | u(x) |$，$0 \leqq x \leqq \pi$，をもつ$C[0,\ \pi]$，

内積$(u,\ v) = \int_0^\pi u(x) v(x)\, dx$ をもつ$L^2[0,\ \pi]$．

RMSノルムだけではあるが，もう一つの教育的な例として，次を考えることができる．

$0 \leqq x \leqq \pi$上のRiemann(2乗)可積分関数全体$R^2[0,\ \pi]$，

上のRMSノルム $\| u \| = [\int_0^\pi | u(x)|^2 dx]^{1/2}$をもつ$R^2[0,\ \pi]$，

$0 \leqq x \leqq \pi$上のLebesgue2乗可積分関数全体$L^2[0,\ \pi]$，

内積$(u,\ v) = \int_0^\pi u(x) v(x)\, dx$ をもつ $L^2[0,\ \pi]$．

歴史的に，Riemann可積分である連続関数はすべてのRiemann可積分関数に拡張されたし，後者は更に完備性を欠くにしてもLebesgue可積分関数に拡張された．

上述の線形またはベクトル空間は次の構造をもつ．

線型空間‡)

ベクトル：

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \\ \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \text{ なる}\mathbf{0}\text{の一意的な存在} \\ -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}\text{なる一意な負ベクトルの存在} \end{array}\right\} \text{すなわち，可換加法群．}$$

*）本書では通常，実数値関数に対する関数空間の概念が述べられる．複素数値関数$u(x) + iv(x)$も同様に述べられるが，ただ右辺に複素共役をとることが必要になる．例えば，$(u,\ v) = \int_0^\pi u(x) \overline{v(x)}\, dx$（数学者）または$(u,\ v) = \int_0^\pi \overline{u(x)} v(x)\, dx$（物理学者）．多くの関数解析学の著書は明確にか暗黙にかいずれにしても，初めから複素数で扱われている．その理由は，定理がより強い形に導出されるからであって，それらの結果を実数の場合に適用するには注意深くあらねばならない．

†）別称L^2ノルム，節1.6.3を見よ．

スカラー：

$$\left.\begin{array}{l} a(u+v)=au+av \\ (a+b)u=au+bu \\ (ab)u=a(bu) \\ 1\cdot u=u \end{array}\right\}$$ スカラーは通常，実数または複素数とする．

線形ノルム空間

ノルム $\|u\|$ を備えた線形空間．ノルムは次の性質をもつ．

$\|u\| \geqq 0, \quad \|u\|=0 \Leftrightarrow u=0$	正定符号，
$\|u+v\| \leqq \|u\|+\|v\|$	三角不等式，
$\|\alpha u\| = \|\alpha\|\|u\|$	同次性．

完備線形ノルム空間

Cauchy完備な線形ノルム空間*)；すなわち，$n\to\infty$，$m\to\infty$のとき $\|u_n-u_m\|\to 0$ならば，$n\to\infty$のとき $\|u_n-u\|\to 0$なる極限ベクトルuがその空間に存在する．

完備線形内積ノルム空間（＝Hilbert空間）

ノルムが内積によって，$\|u\|^2=(u, u)$と与えられている完備線形ノルム空間．ここで，内積†)は次の性質をもつ．

$$\left.\begin{array}{ll} (au+bv, w)=a(u, w)+b(v, w) & \\ (u, w)=\overline{(w, u)} & \text{対称性} \\ (u, u)=\|u\|^2 & \text{ノルム両立性} \end{array}\right\} \text{双線形性．}$$

Hilbert空間の完備性についての注意を幾つか挙げよう．

完備性の概念は，たとえ構成不能とか実現不能に非常に近かろうとも，極限の要素が定義されるという理想化である．この様に実数系の公理によって，有理数のCauchy列の極限$|a_n-a_m|\to 0$として無理数が定義され，そのとき（慣例に従って§)）有理数と無理数をもつが，それら以外には何も含まれるものがないことが示される．すなわち，無理数のCauchy列または有理数と無理数の混合数のCauchy列をとれば，それら

‡） **ベクトル空間**とも呼ばれる．$C[0, \pi]$ とか$R^2[0, \pi]$ の様な無限次元の例をとる必要がなく，n次元実空間R^nで十分である．しかし，重要なことは殆んどの任意の関数空間が線形空間の公理を満たすことである；例えば，$C^0(\Omega)$，$C^m(\Omega)$，$C_0^\infty(\Omega)$，$L^p(\Omega)$その他，多数．ところが，これに対する例外は，特定の非同次境界条件を含ませるときに生ずる．例えば，$f(1)=g(1)=1$であっても，$f+g$は同じ条件を満たさない．

*） 一目瞭然な基本的な例は，ノルムが絶対値で与えられる実数の1次元ベクトル空間である．完備性は（完備でない）有理数から無理数が構成されることによってわかる．

†） スカラー（実数あるいは複素数の）値をとる．

§） “超準解析学”において，慣例の実数系の拡大が行われる．

以外のどんな理想化された極限をも生成されない．この事実は，2次元空間，3次元空間，n次元空間，l^2(無限次元Hilbert空間)，L^2，および解析学や微分方程式論に用いられる実用的なすべての完備な関数空間にとって，同様に基本である．

同様に，Lebesgue可積分性の概念はRiemann可積分関数を完備化するために作られた理想化である[*]．線形ノルム空間の上の例で，この様に，$L^2[0, \pi]$はRMSノルムにおける$R^2[0, \pi]$の完備化とみなせる．より小さな関数空間$C[0, \pi]$もまたRMS完備化として$L^2[0, \pi]$をもつことになる．この事は$C^1[0, \pi]$，$C^n[0, \pi]$の場合でもそうであり，$[0, \pi]$内にコンパクトな台をもつ無限回可微分な関数$C_0^\infty[0, \pi]$でもそうである[†]．完備化$L^2[0, \pi]$をもつ$L^2[0, \pi]$のこの様な任意の部分空間は$L^2[0, \pi]$の**稠密な**部分空間と呼ばれ，またノルムを内積で定めた完備でない線形空間であるところの**原**(または**前**)**Hilbert空間**としばしば呼ばれているものの一例である．Hilbert空間法の理論でもその応用でも，通常，すべて計算を行える様に，好適な関数のある稠密な原Hilbert空間に立って，最後にHilbert空間全体に要請された結果が得られる様に，極限をとることにより一般の場合に対して議論することは注目に値する．

最大値ノルム$\|u\| = \max|u(x)|$，$0 \leqq x \leqq \pi$，はL^2ノルムより強いノルムである[‡]．実際，連続関数列の一様な点別極限は連続であるから，それは$C[0, \pi]$を完備化するのに十分強い．この完備化に対して支払う代償はノルムと矛盾しない内積を欠くことである[§]．

Hilbert空間の内積によって，2次元空間や3次元空間で解析的なベクトル力学を論ずるときに用いられた通常の幾何学的解釈は，無限次元の関数空間にまで一般化されてもかまわない．これが次の基礎定理の内容である，すなわち，任意の関数は，2次元空間や3次元空間に対すPythágorasの定理と全く同じく，直交ベクトルの基底上に射影された成分の(無限)和とみなされる．

定義．　$(u, v) = 0$のとき，uとvは**直交する**(すなわち，互いに垂直)といわれる．とくに，$\|u\| = \|v\| = 1$のとき，uとvは**正規直交である**といわれる．ベクトル集合$\{\varphi_i\}$は，それらがすべて互いに正規直交，すなわち，そのうちのどれもが残りのすべてと正規直交であるとき，**正規直交集合**と呼ばれる，ベクトル集合$\{\varphi_i\}$が与えられたHilbert空間Hで**極大正規直交集合**[*)] (**MOS**)といわれるのは，すべての$\{\varphi_i\}$と正規直交である他のベクトルをHの中に見出すことのできないときである．

*)　種々の意味で非Riemann可積分関数に収束するRiemann可積分関数の例に対しては，積分論に関する参考書を見よ．

†)　問題2.9.3を見よ．そこではこの重要な事実の証明が与えられる．

‡)　節1.6.3問題1を見よ．そこで，一様収束性がL^2収束になることを示した．

§)　完備線形ノルム空間は**Banach空間**と呼ばれる．最大値ノルムをもつ$C[0, \pi]$はBanach空間であるが，Hilbert空間でない．

直交ベクトルの例は，2次元における(1, 0)と(0, 3)や$L^2(0, \pi)$における$\sin nx$, $n=1, 2, 3, \cdots$である．これらは正規化されるとき，すなわち，それらの長さまたはノルムで割ってやると，正規直交になる．例えば，2次元空間で(1, 0)と(0, 1)または$L^2(0, \pi)$で$(2\pi^{-1})^{\frac{1}{2}}\sin nx$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$．Fourier解析で最も慣例的な極大正規直交集合は，いわゆる三角関数基底$\{\varphi_i\}=\{1/(2\pi)^{\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}}\sin nx, n=1, 2, 3, \cdots, \pi^{-\frac{1}{2}}\cos nx, n=1, 2, 3, \cdots\}$である．これが$L^2(-\pi, \pi)$で極大になっているという事実は，勿論自明でなく，今世紀の初めまで証明されていなかった．

定　理　H

$\{\varphi_i\}$をHilbert空間Hの正規直交集合とする．このとき，次の命題は同値である．

(1)　$\{\varphi_i\}$は極大正規直交集合(MOS)である．

(2)　すべてのφ_iに直交するHの任意のuは必ず0.

(3)　Hのどのuも(Fourier)表現$u=\sum(u, \varphi_i)\varphi_i$をもつ．

(4)　Hのどのuも(Parseval)等式によって与えられるノルム$\|u\|^2=\sum|(u, \varphi_i)|^2$をもつ．

定理を証明する前に，補助定理として次の三つの事実を述べ，後で証明しよう．

補助定理　1

内積は**結合連続**である．すなわち，u_nがHでuに収束し，v_nがHでvに収束するとき，その内積は収束して，

$$(u_n, v_n) \to (u, v).$$

補助定理　2

正規直交集合$\{\varphi_i\}$がHで極大であるか否かによらず，**Bessel不等式**が成り立つ．

$$\|u\|^2 \geqq \sum |(u, \varphi_i)|^2. \tag{4'}$$

補助定理　3*)

任意のHilbert空間Hに対して，(3)と(4)は意味をもち，それぞれuに対して可算個(すなわち，$i=1, 2, 3, \cdots$と，番号づけられた形)からなる$\{\varphi_i\}$のみを含む．

+)　多くの参考書では，完全正規直交集合(COS)なる術語が用いられている．しかるに，形容詞のmaximalもcompleteも共にゆるめて用いると同じ事，すなわち，基底$\{\varphi_i\}$に残された基底要素を見落すことのない事を意味するけれども，この性質は極大性の一つである．形容詞completeはHilbert空間の収束性の(解析学的)性質を述べるために上で既に用いられており，よって本書では上の(幾何学的)性質に対して形容詞maximalが用いられる．

*)　ここでは故意に，(3), (4), (4′)において，また$\{\varphi_i\}$をiで番号づけるときも曖昧にした．あるHilbert空間は**非可算個の**$\{\varphi_i\}$を要求するが，補助定理3が示す様に，すべての場合に各uは可算的に番号づけられる表現をもつ．ここで用いられた多くのHilbert空間は，$H=L^2[0, \pi]$に対する正弦関数$\varphi_n(x)=2^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\sin nx$, $n=1, 2, 3, \cdots$, の様な単独可算の$\{\varphi_i\}$をもつだろう．

定理の証明*)

次に(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)を示す．

(1)⇒(2)．そうでないと仮定する．そのとき，ある$u\perp\{\varphi_i\}$，$u\neq 0$が存在する．$\varphi=u/\|u\|$とおくと，すべてのφ_iに対して，$(\varphi,\ \varphi_i)=0$．よって$\{\varphi,\ \varphi_i\}$は拡張された正規直交集合．これは矛盾である．

(2)⇒(3)．$u-\Sigma_{i=1}^{\infty}(u,\ \varphi_i)\varphi_i$を考える．これはHilbert空間のベクトルである．なぜなら，補助定理3により$(u,\ \varphi_i)\neq 0$なる可算個のφ_iのみが存在し，かつ無限和$\Sigma_{i=1}^{\infty}(u,\varphi_i)\varphi_i$が補助定理2により収束する部分和$s_N=\Sigma_{i=1}^{N}(u,\varphi_i)\varphi_i$の極限である（以下の議論参照）．このとき，$u-\Sigma_{i=1}^{\infty}(u,\ \varphi_i)\varphi_i$と任意の$\varphi_i$との内積をとって

$$\begin{aligned}\left(\varphi_j,\ u-\sum_{i=1}^{\infty}(u,\ \varphi_i)\varphi_i\right) &= (\varphi_j,\ u)-\left(\varphi_j,\ \sum_{i=1}^{\infty}(u,\ \varphi_i)\varphi_i\right)\\ &= (\varphi_j,\ u)-\lim_{N\to\infty}\left(\varphi_j,\ \sum_{i=1}^{N}(u,\ \varphi_i)\varphi_i\right)\\ &= (\varphi_j,\ u)-(u,\ \varphi_j)\\ &= 0.\end{aligned}$$

これは(2)によって，(3)となる．上の第二段階で，補助定理1の結合連続性によって示される内積の個々の連続性が用いられた．

(3)⇒(4)．これは内積の結合連続性から，次式によって示される．

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\equiv \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}(u,\ \varphi_i)\varphi_i,\ \sum_{i=1}^{N}(u,\ \varphi_i)\varphi_i\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|(u,\ \varphi_i)|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(u,\ \varphi_i)|^2.\end{aligned}$$

(4)⇒(1)．$\{\varphi_i\}$が極大でないと仮定する．拡張された集合$\{\varphi,\ \varphi_i\}$に対し，(4)をφに適用すると

$$1=\|\varphi\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(\varphi,\ \varphi_i)|^2=0$$

となり，矛盾を得る．

補助定理1の証明

$\|u_n-u\|\to 0$と$\|v_n-v\|\to 0$を仮定する．するとSchwarz不等式によって

*）複素共役を避けて，実Hilbert空間で考えることにする．定理Hとその証明は複素数その他のいずれのスカラー体に対しても同じである．

$$\begin{aligned}|(u_n, v_n) - (u, v)| &= |(u_n - u, v_n) + (u, v_n - v)| \\ &\leqq |(u_n - u, v_n)| + |(u, v_n - v)| \\ &\leqq \|u_n - u\|\|v_n\| + \|u\|\|v_n - v\| \\ &\leqq \|u_n - u\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\| + \|u\|\|v_n - v\| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

補助定理2の証明

補助定理3によって，与えられたuに対して高々可算個のφ_iを考える必要のあることがわかる．ただし$(u, \varphi_i) \neq 0$とする．これらのφ_iの有限n個を考えると，Bessel不等式が次の様に得られる．

$$\begin{aligned}0 &\leqq \left\| u - \sum_{i=1}^{n} (u, \varphi_i)\varphi_i \right\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\left(u, \sum_{i=1}^{n} (u, \varphi_i)\varphi_i\right) + \sum_{i=1}^{n} |(u, \varphi_i)|^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(u, \varphi_i)|^2.\end{aligned}$$

よって，任意の有限n個のφ_iに対して，$\sum_{i=1}^{n}|(u, \varphi_i)|^2 \leqq \|u\|^2$．この事は級数$\sum_{i=1}^{n}|(u, \varphi_i)|^2$が$\|u\|^2$を超えないある極限に絶対収束することを意味する．また，部分和$s_n = \sum_{i=1}^{n}(u, \varphi_i)\varphi_i$は，

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |(u, \varphi_i)|^2 \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} |(u, \varphi_i)|^2 \to 0 \; {}^{*)}$$

によってCauchy列をなすから，収束すること（(2)⟹(3)の証明に用いられた上の事実）をも意味する．

補助定理3の証明

任意の極大正規直交集合$\{\varphi_\alpha\}$から始めよう．ここで添字αは可算的かあるいは恐らく非可算的な添字集合のいずれかを示すために用いられる[†]．Hの任意に与えられたuに対して，$\|u\| = 1$ととると，集合

$$\Phi(u) = \{(u, \varphi_\alpha) \neq 0 \text{ である様なすべての } \varphi_\alpha\}$$

は明らかに，$\Phi(u) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi_n(u)$と与えられる．ここで

$$\Phi_n(u) = \{\, |(u, \varphi_\alpha)|^2 \geqq 1/n \text{ である様なすべての } \varphi_\alpha\}.$$

*) 更に，$\sum_{i=1}^{\infty}|(u, \varphi_i)|^2$が絶対収束し，かつ微積分学によって絶対収束級数が項の並べかえに依らず同じ極限値をもつことから，$s_n \to u$はφ_iのとり方の順序に関係なく成り立つ．

有限和Bessel不等式$\sum_{i=1}^{n}|(u,\ \varphi_i)|^2 \leqq \|u\|^2$によって，$\Phi_n(u)$には高々$n$個のベクトル$\{\varphi_\alpha\}$が存在し得る．$\Phi(u)$が有限個のベクトルの可算的に番号付けられた和であるから，それはそれ自身可算的である(この型の理由付けについての問題2を見よ)．

問題1. (a)逆三角不等式から，Hilbert空間H(またはもっと一般的には任意の線形ノルム空間)で$u_n \to u$のとき，ノルムもまた収束すること，すなわち，$\|u_n\| \to \|u\|$を示せ．(b) (a)を用いて補助定理1の証明を一行短縮せよ．

問題2.　補助定理3の証明で，有限集合の可算個の和が可算的であるという集合論の事実が用いられた．この集合論の事実を証明せよ．

問題3.　任意のHilbert空間が少なくとも一つの極大正規直交集合を含むことを証明するのに，**Zornの補題**として知られる集合論の事実公理が用いられる．またそれを用いて，どんな散逸偏微分作用素に対しても極大散逸拡張の様なもの，その他の存在[‡]を保証することができる．一般に，それは解析学と論理学の間の興味ある掛け橋を形成すると主張する．従ってこの問題は，そうした望みをもつ者にとって，格好の題材を提供している．

極大正規直交集合の存在を確立する議論は次の通りである．ΦをHにおけるすべての正規直交集合のクラスとする．Hが空でないことから，Φは空でない．すべてのφ_αが既にφ_βであるとき$\{\varphi_\alpha\} \subset \{\varphi_\beta\}$と記して，$\Phi$を半順序集合にする．次の二文章順序づけの議論によって，Zorn補題が極大正規直交集合の存在を主張する．正規直交集合の任意の鎖に対して，そこでのすべての要素の和Ψは，この鎖の任意の$\{\varphi_\alpha\}$が集合の包含関係の意味でΨによって上から押さえられるので，その鎖の上界である．更に，$\Psi \subset \Phi$．なぜなら，Ψの任意のφ_αとφ_βは，$\{\varphi_\alpha\} \subset \{\varphi_\beta\}$か$\{\varphi_\beta\} \subset \{\varphi_\alpha\}$のいずれかの様な鎖における正規直交集合$\{\varphi_\alpha\}$と$\{\varphi_\beta\}$の要素であって，いずれの場合でも$(\varphi_\alpha,\ \varphi_\beta)=0$である．

文献に当りながら，次の演習問題に答えよ．(a)上の証明を詳細にわたって照合し

†) 非可分的なHilbert空間の興味ある例は$-\infty < x < \infty$上の概周期関数のHilbert空間である．各$\varepsilon > 0$に対して区間長lを次の様に定めたすべての連続関数$f(x)$から始めよう．いずれのl-区間の内部にも，すべての$-\infty < x < \infty$に対して$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon$とする様な少なくとも一つの数$\tau$が存在する．内積が，$x$に依らずに存在する

$$(f,\ g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)g(x+t)\,dt$$

によって与えられることを示すことができる．この完備化は**概周期関数のHilbert空間**と呼ばれ，Harold Bohrによって導入された．彼は数学者で，物理学者Niels Bohrの弟である．正規直交基底は$\varphi_\alpha = e^{i\alpha x}$ $(-\infty < \alpha < \infty)$である．補助定理3は，任意の与えられた概周期関数$f(x)$に対して，可算個の$\varphi_\alpha$だけが$f(x)$をFourier表現するのに必要となることを主張する(訳者注：H.Bohr：1887-1951，N.Bohr：1885-1962)．

‡) 散逸微分作用素の概念については次を見よ．R. Philips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.* **90**(1959), 193-254.

ながら完成させよ．（b）同様の基底の結果がBanach空間で成り立つと長い間予想されていたが，最近その反例が与えられた*）．（i）その様なBanach空間の基底（**Schauder基底**）の性質を述べて，一つの具体例をかき下ろせ．（ii）反例を調べて，その性質の幾つかを決定せよ．（c）どの線形ノルム空間でも，代数的（線形）基底を含む．（i）その様な基底（**Hamel基底**）の性質や次元を決定せよ．（ii）Zornの補題はその存在に立ち入れるか？（d）なぜZornの補題を用いてBanach空間に対するSchauder基底を保証できないかについて考えよ．

2.4 Fourier級数とSturm-Liouville方程式

前節の定理HはSturm-Liouvilleの定理と結びつけられる．前者は，すべての適当な関数が任意の極大正規直交集合$\{\varphi_n\}$を用いてFourier展開されると主張し，後者は，大きなクラスの常微分方程式が実際に極大正規直交集合$\{\varphi_n\}$をそれらの固有関数とする性質をもつと主張する．自然（あるいは恐らく数学的整合性）はそれをもつと思われるので，このクラスの常微分方程式は，与えられた領域Ω上で偏微分方程式を変数分離法で解くときに導かれるものの殆んどを含む．更に，この様にして得られた$\{\varphi_n\}$は通常最も自然であり，与えられた偏微分方程式に対するFourier展開の解にとって，最も効果的な基底である．

$L^2(a,\ b,\ r)$を，区間$(a,\ b)$†）上で定義され，“**重み関数**”$r(x)$に関して2乗可積分な関数$u(x)$の集まりとする．すなわち

$$\int_a^b |u(x)|^2 r(x)\, dx < \infty.$$

$L^2(a,\ b,\ r)$は常に可分Hilbert空間である（問題1.9.3参照）．

$$-(pu')' + qu = \lambda ru, \qquad a < x < b \tag{1}$$

の形の任意の常微分方程式を考えよう．ここで，uは$L^2(a,\ b,\ r)$に属し，更に(1)での演算が$L^2(a,\ b,\ r)$の範囲内に留まる様に実行され，そして次の条件‡）が成り立つ様に，十分に好適であるとする．すなわち，

（i）pは$(a,\ b)$上で定義された実可測関数で，区間上$p(x)\neq 0$，かつpとp^{-1}が$(a,\ b)$で局所可積分§）．

*）この反例については，次を見よ．P.Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Mathematica*, **130**(1973), 309-317.

†）有限区間，半直線，全実直線のいずれでもよい．実際には，これらの関数は複素数値関数$u(x)+iv(x)$でなければならないが，技術的考察を除いて，方程式(1)は実数値関数と実数値解を考えてよい．

‡）十分に包容力をもたせるために，これらの条件はLebesgue積分論の言葉でのべられた．しかし，例えば，$p,\ p',\ p^{-1},\ q,\ r$のすべてが$(a,\ b)$上の正値連続関数である等の適当な条件を用いて考えてもよい．標準的な例は，既出のRayleigh方程式

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < \pi$$

である．他の例については，節2.1を見よ．

§）すなわち，$(a,\ b)$に含まれる任意の有界区間〔$c,\ d$〕上で可積分．

(ii) qは$(a,\ b)$上で定義された実可測関数で，区間上で局所可積分.
(iii) rは$(a,\ b)$上で定義された実可測関数で，区間上$r(x)>0$，かつその区間で局所可積分.

定義. 上の条件のもとで，方程式(1)は**Sturm-Liouville方程式**といわれる．更に，$(a,\ b)$が有限で，p^{-1}，q，rが$(a,\ b)$上で可積分のとき，(1)は**正則**といわれ，それ以外のとき**特異**といわれる.

簡単のため，定理を述べるに当って，正則な場合に制限して*)，分離境界条件をとる.

$$
\begin{aligned}
u(a)\cos\alpha - u'(a)p(a)\sin\alpha &= 0,\\
u(b)\cos\beta - u'(b)p(b)\sin\beta &= 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，αとβはいずれも〔0，π〕の任意の数である.

定理(Sturm-Liouville)

境界条件(2)に従う方程式(1)の固有関数はHilbert空間$H=L^2(a,\ b,\ r)$に対する極大正規直交集合(MOS)$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$を形成する.

いいかえると，境界条件(2)をもつ方程式(1)は，任意の2乗可積分関数uのFourier表現

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

を許容するDirichlet境界条件をもつ“標準”Rayleigh方程式と同様に振舞う．このとき，この事は原理的に，形式

$$u(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n_1, n_2, \ldots} c_{n_1 n_2 \ldots}\, u_{n_1 n_2 \ldots}(x_1, x_2, \cdots)$$

を解候補と試みる変数分離の手続きを正当化する．ここで$u_{n_1 n_2}\cdots(x_1,\ x_2,\ \cdots)\equiv\varphi_{n1}(x_1)\varphi_{n2}(x_2)\cdots$はもとの偏微分方程式と与えられた境界条件や初期条件に依存する特殊Sturm-Liouville固有関数と関連初期値問題の解の積である．数学的に完全な取扱いに対しては勿論，それぞれの場合に分けて考えなければならず，その様にして構成された形式解が存在，一意性，安定性の条件を満たす偏微分方程式の実は真の正

*)　特異の場合の固有関数は，極大正規直交集合のときもあり，そうでないときもある．それは例えば，区間の両端でいわゆる極限円をもつとき，適当な境界条件のもとで，正則の場合と同じく固有関数の極大正規直交集合が得られる．極限点の場合にはどちらかの方に移る．問題2.9.4を参照.

則解であることを(例えば，項別微分法によって)証明できる様に，同伴固有関数に対して十分な性質を確立するために実際に解を求め(または評価し)なければならない.

ここでは，上記Sturm-Liouville定理の証明を要約して与える．詳細は読者にゆだねられる(問題3).

証明. 次のロンスキアンから始めよう.

$$W(u, \overline{v})(x) = p(x)[u(x)\overline{v'(x)} - u'(x)\overline{v(x)}].$$

部分積分して，

$$\int_a^b Lu\overline{v}\, dx - \int_a^b u\overline{Lv}\, dx = \int_a^b \frac{d}{dx} W(u, \overline{v})(x) = W(u, \overline{v})|_a^b.$$

ここで

$$Lu = -(pu')' + qu$$

は上の(1)で与えたSturm-Liouville作用素である．Lが$L^2(a, b)$で対称作用素である*)ためには，

$$W(u, \overline{v})|_a^b = 0$$

が必要かつ十分である．そのためには，上の分離境界条件(2)で十分である．この様に，Sturm-Liouville作用素(1), (2)は十分に正則な関数の任意の適当な部分空間上で対称であることがわかる．更に，それは形式的に自己共役(C_0^∞級関数上でその閉包が自己共役ということ)であるといわれてもよく，その領域$D(L)$を超関数的導関数に拡張すると(問題1.9.7(2)参照)，それは自己共役作用素であるだろう．$Lu=\lambda u$を上の部分積分の式に代入することによりSturm-Liouville作用素(1), (2)に対して知られる様に，どんな自己共役作用素も実固有値のみをもつ.

係数に関する適切な連続性またはより弱い仮定のもとで常微分方程式の理論から，各λに対して同次方程式

$$Lu - \lambda ru = 0$$

の解の2パラメータ族$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$が存在する．非自明な特殊解$\varphi(x, \lambda)$は，すべての$\lambda$に対して，左端条件

$$\varphi(a, \lambda) = \sin\alpha, \qquad \varphi'(a, \lambda) = p^{-1}(a)\cos\alpha$$

によって決定される．このとき，$\varphi(x, \lambda)$は(2)の左境界条件を満たす．よって，$\varphi(x, \lambda)$が作用素(1), (2)および対応する固有値λに対する固有関数であるのは，$\varphi(x, \lambda)$が(2)の右境界条件を満たすときに限る．すなわち，

*) 問題1.9.7を見よ．$L^2(a, b)$で対称なLが，$L^2(a, b, r)$で対称な$(1/r)L$に同値であることは容易にわかる.

$$f(\lambda) \equiv \varphi(b, \lambda) \cos \beta - \varphi'(b, \lambda) p(b) \sin \beta = 0$$

のときで，かつそのときに限られるだろう．λで(1)，(2)に対する1次独立な固有関数ψは他にあり得ない．なぜなら，もしあるとすれば，解の1次独立性に対するWronsky判定法によって，区間(a, b)上で$W(\varphi, \psi) \neq 0$でなければならないが，

$$p(a)[\psi(a)\varphi'(a, \lambda) - \psi'(a)\varphi(a, \lambda)] = 0$$

となり，これは矛盾である．

さて，同様にして右端条件

$$\psi(b, \lambda) = \sin \beta, \qquad \psi'(b, \lambda) = p^{-1}(b) \cos \beta$$

から定まる非自明な特殊解$\psi(x, \lambda)$を構成することも有益である．この解$\psi(x, \lambda)$が(2)の右境界条件を満たし，作用素(1)，(2)の固有関数であるのは，それが(2)の左境界条件を満たす，すなわち$\varphi(x, \lambda)$の倍数になっているときで，かつそのときに限られるだろう．そうでなければ，φとψは同次方程式の二つの基本解である．

$\psi(x, \lambda)$に対して指定された右端境界値を上の$f(\lambda)$に代入すると，

$$f(\lambda) = W_\lambda(\varphi, \psi)(b)$$

となる．上の部分積分と複素数であって実数ではないλに対する作用素(1)，(2)の対称性とによって，$f(\lambda)$は0でないことがわかる．更に，fはλについて解析的であるという重要な性質をもち，位数1/2以下の整関数のクラスに属する．上にみられる様に，$f(\lambda)$の零点は厳密に作用素(1)，(2)の固有値である．解析関数論の定理から，任意の有界な区間関数にある$f(\lambda)$の零点の個数は有限であって，算出できる．このことは，作用素が自己共役であるが有界でない事柄と合せて固有値λ_nの全体は実数の有界でない可算的な集合であるということを保証する．それぞれのλ_nに対して，上で構成された様に，固有関数$\varphi(x, \lambda_n)$が存在する．

固有関数$\{\varphi_n\}$の極大性を示すためには，数多くの手法がある．そのうちの一つは，非同次方程式を解くときの定数変化法と同様，Green関数

$$-G_\lambda(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x, \lambda)\psi(y, \lambda)}{W_\lambda(\varphi, \psi)(b)}, & a \leqq x \leqq y \leqq b, \\[2ex] \dfrac{\psi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)}{W_\lambda(\varphi, \psi)(b)}, & a \leqq y \leqq x \leqq b \end{cases}$$

を考えることである．このとき，任意のλに対して，対応する積分作用素(問題2.9.5参照)

$$(r^{-1}L - \lambda)^{-1} w(x) = \int_a^b G_\lambda(x, y) w(y)\, dy$$

は$L^2(a, b, r)$上で“コンパクト”で，かつ記号で指示された様に，任意の非固有値

λで作用素(1), (2)を逆にすることが示される．初等スペクトル理論から，コンパクトな自己共役な作用素の固有関数が極大であることがわかり，関係

$$L\varphi_n = \lambda_n r\varphi_n \Leftrightarrow (r^{-1}L)^{-1}\varphi_n = \lambda_n^{-1}\varphi_n$$

から，Lの固有関数と$(r^{-1}L)^{-1}$の固有関数とが同じものであることがわかる*)．

ときには，Sturm-Liouville定理に依らずに，直接与えられた正規直交集合の極大性を証明することができる．それによれば，Sturm-Liouville方程式を解くことが避けられる．他方，幾つかの対応した強い結果が通常必要である．与えられた正規直交集合の極大性のその様な直接証明を，二つの例によって説明しよう．

まず，これまでの$L^2(0,\pi)$の正弦関数基底$\{\varphi_n=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\sin nx\}$を考えよう．Dirichlet境界条件をもつRayleigh方程式に，上のSturm-Liouvilleの定理を適用すると，$\{\varphi_n\}$は$L^2(0,\ \pi)$に対する極大正規直交集合である．

この事実を直接証明するには，強Dini判定(問題1.9.6参照)と，C_0^∞級関数が常に$L^2(a,\ b,\ r)$で稠密であるという基本的事実が用いられる．前節の定理Hによって，$L^2(0,\ \pi)$の任意のfに対して，十分に大きなNで

$$\|f - s_N^f\|_{L^2(0,\pi)}$$

を任意に小さくできることを示すことで十分である．ここで

$$s_N^f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n(x), \qquad c_n = (f, \varphi_n) = \int_0^\pi f(s)\,\varphi_n(s)\,ds.$$

任意の与えられた$\varepsilon>0$に対し，C_0^∞級の上述の稠密性によって

$$\|f - h\| < \varepsilon/2$$

の様な$C_0^\infty(0,\ \pi)$の近似関数hが見出される．前節の補助定理2(Bessel不等式)の証明と同様，次が成り立つ†)．

$$\begin{aligned}\|f - s_N^h\|^2 &= \|f\|^2 - 2\left(f, \sum_{n=1}^{N}(h, \varphi_n)\varphi_n\right) + \sum_{n=1}^{N}(h, \varphi_n)^2\\ &= \|f - s_N^f\|^2 + \sum_{n=1}^{N}[(h, \varphi_n) - (f, \varphi_n)]^2\end{aligned}$$

よって

$$\|f - s_N^f\| \leqq \|f - s_N^h\|.$$

*) この型の証明には変形がある．例えば，Lの逆が離散スペクトルをもつコンパクトな自己共役であることを示すのを避けるために，固有値λ_nの変分的特徴付けによる．しかし微分方程式のスペクトル的性質とその変分的特徴付けのそれらとの厳密な同値性は，逆作用素のコンパクト性を実証してみせることと大体において同値である．スペクトル理論についてより進んだ情報については，節2.7.2を見よ．

†) 2乗ノルムの完備化はまた，φ_nの重みつき和によるfへの最良の最小2乗近似が重み関数に対してFourier係数を用いて求められることを示す．

強Dini判定から，$h(x)$のFourier級数$s_N^h(x)$は区間［0, π］上hに点別に一様収束し，更にその平均でもそうで(節1.6.3問題1参照)，従って十分に大きなNに対して

$$\|h - s_N^h\| < \varepsilon/2 .$$

これらの事実を三角不等式で結びつけると，結局，十分に大きなNに対して

$$\begin{aligned}\|f - s_N^f\| &\leqq \|f - s_N^h\| \\ &\leqq \|f - h\| + \|h - s_N^h\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .\end{aligned}$$

与えられた関数列$\{\varphi_n\}$の極大性を直接証明する第二の例として，任意の有限区間(a, b)に対してL^2で適当に正規化されたべき関数$\varphi_n(x) = x^n$ ($n=0, 1, 2, \cdots$) を考えよう．簡単のため，$L^2(-1, 1)$の場合を考える．ここでWeierstrassの近似定理を用いよう．すなわち，$C^0[-1, 1]$の任意のhに対して，任意の与えられた$\varepsilon>0$で

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1} |h(x) - p(x)| < \varepsilon/2\sqrt{2}$$

である様な多項式pが存在する．これは明らかに

$$\|h - p\|_{L^2(-1,1)} < \varepsilon/2$$

のことでもある．また$L^2(-1, 1)$のC_0^∞級関数の稠密性を用いると，その結果，任意の$f \in L^2(-1, 1)$に対して，C_0^∞で適当に近似するhと多項式pがあって

$$\begin{aligned}\|f - p\| &\leqq \|f - h\| + \|h - p\| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

この事は，$\varphi_n = x^n$, $n=0, 1, 2, \cdots$の1次結合

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n$$

によって，fを任意に精度よく近似できることを示す．これらの$\{\varphi_n\}$はこの様に，たとえそれらが相互に正規直交していなくても，定理Hの意味(3)で極大なのである．これらを結びつけると(以下の問題2参照)，それらは節2.1で与えたLegendre多項式の極大正規直交集合になる．

ここで以上をまとめておこう．$\{\varphi_n\}$が極大正規直交集合であることを示すには，次の三つの方法がある：

1. 次の三つの事項の使用．

(i)　C_0^∞のtest関数が稠密であるという基本近似定理(問題2.9.3)．

(ii)　Dini判定または変分的特徴付けの様な幾つかの他の既に確立された基本的な補助的事実．

(iii) Bessel不等式の様な幾つかの基礎的直交性の議論.

2. 次の三つの事項の使用.

(i) C_0^∞級関数に対する基本近似定理.

(ii) Weierstrassの定理の様なもう一つの有力な定理.

(iii) Gram-Schmidtの様なある方法で直交化すること(問題2.9.3参照).

3. 次の三つの事項の使用.

(i) 本節のSturm-Liouvilleの定理.

(ii) 含まれる作用素Lが自己共役であることを確認すること.

(iii) その正則性または受け入れられる型の特異性の決定(問題2.9.4).

問題1. (a) Sturm-Liouville形式(1)の方程式から，係数pと重み関数rを消去して，いわゆる正規形

$$-v''(y) + c(y)v(y) = \lambda v(y), \qquad a' < y < b' \tag{1)'$$

に変換せよ．また，$c(y)$を求めよ．ここで，独立変数と従属変数はそれぞれ次を用いよ.

$$y = \int_{x_0}^{x} r(s)^{1/2} p(s)^{-1/2}\, ds,$$

$$v(y) = u(x) r(x)^{1/4} p(x)^{1/4}.$$

また，区間(a', b')は(a, b)内のx_0の選び方に依存する.

(b) Hermite方程式とLegendre方程式(節2.1参照)を正規形(1)′およびSturm-Liouville形(1)に変換し，次に逆を行え.

(c) 更に，両方程式を第三のまたは次の微分方程式の形に変換し，次に逆を行え.

$$a_0(x)w''(x) + a_1(x)w'(x) + a_2(x)w(x) = 0. \tag{1)''$$

問題2. (a) Rayleigh方程式

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < \pi$$

が正則なSturm-Liouville方程式であることを確かめよ．(b) Hermite方程式とLegendre方程式(節2.1参照)が特異Sturm-Liouville方程式であることを確かめよ.
(c) Gram-Schmidtの方法によって(問題2.9.3参照)，上で与えた$\varphi_n = x^n$を正規直交化せよ.

問題3. (a) 一般の分離境界条件(2)のαとβを指定して，Rayleigh方程式と区間$(0, \pi)$に対して，(i)Dirichlet境界条件，(ii)Neumann境界条件，(iii)Robin境界条件を求めよ．(b) 分離境界条件(2)から，作用素の自己共役性と可算個の固有値λ_nの存在に加えて，どんなスペクトル情報が得られるか？ (c) 上で与えたSturm-Liouville定理の証明の詳細を埋めよ.

2.5 Fourier級数とGreen関数

全く明らかなことではあるが，(1)偏微分方程式の(変数分離法による)解のFourier

級数表現と(2)それらの解のGreen関数表現の間には，ある種の結びつきがなければならない．それらの関連に深入りすることはしないけれども，三つの問題を眺めることで，何が期待されるかを説明しよう．それらの問題とは，双曲型と同次楕円型と非同次楕円型である．放物型の場合は同じ様にして示される(問題3を見よ)．

偏微分方程式の解を求める基本的方法が三つ，すなわち，(1)変数分離法，(2)Green関数法，(3)変分法があったので，すべて六つの方向でこれ等を，すべて三つの方程式のクラスに対して，同次の場合や非同次の場合に対して，異なる境界条件に対して，その他に対してもこれ等の間を往き来しながら，議論したらよいことに注意しよう．この様に，ここでの議論はやむを得ず制限される．けれども節2.6で，楕円型問題ではあるが，第三の基本的解法との結びつきが見出されるであろう．

初めに，次の波動初期値境界値問題を考えよう(図2.5a)．

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0\,. \end{cases}$$

ここで，$f(x)$はFourier正弦展開をもつとする．すなわち，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \qquad c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s) \sin ns\, ds.$$

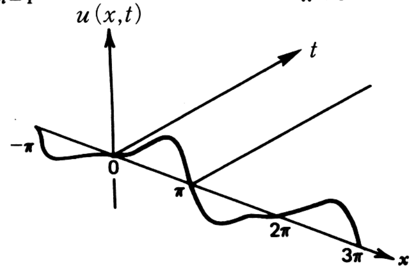


図 2.5a

変数分離法によって(節1.5，節2.1参照)，解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \cos nt.$$

$f(x)$を図に示した様に，$x=0$と$x=\pi$について奇関数的に延長すると，容易に，$f(x)$に対する上のFourier展開は周期的に繰り返されているので，すべての$-\infty<x<\infty$に対して正しく成り立つことがわかる．

$$\sin nx \cos nt = \tfrac{1}{2} \sin n(x - t) + \tfrac{1}{2} \sin n(x + t)$$

なる事実に注目して，すべて存在するなら，和の極限が極限の和であることを用いて，

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n(x - t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n(x + t)$$
$$= \frac{f(x - t) + f(x + t)}{2}.$$

これは波動初期値問題の解に対するいわゆる**d'Alembertの公式**である．この公式は，本節で採用している立場に従って，与えられた問題の解に対するGreen関数表現とみなされ得る．

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) f(y)\, dy$$

ここで，

$$G(x, y, t) = \frac{\delta(x - t, y) + \delta(x + t, y)}{2}$$

δは“**デルタ関数**”測度で，これはデルタ関数の二つの引数が一致する点で，被積分関数の点評価を与える．

一般の波動初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

は直接積分できて(問題1参照)，より**一般的なd'Alembertの公式**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x - t) + f(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds + \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(y, s)\, dy\, ds \right]$$

を得る．これはまた，本節の採っている立場から，与えられた問題の解に対するGreen関数表現公式として見なされる．けれども，上の例でなされた様に変数分離法を介して，この式に到達するのは，かなり面倒である．しかし，実際はこの公式が周期性を要請しないデータに対して正しいより一般的な解とみなされるべきである．

Fourier級数とGreen関数の結びつきを示す第二の例題として，次に，2次元単位球上のDirichlet問題の解に対するPoisson公式が，変数分離法で以前に求めたFourier級数解の和をとることによって，どの様に導かれるかを示そう．

Dirichlet問題(図2.5*b*)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \\ u(1, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

は変数分離解

$$u(r, \theta) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

をもち係数は

$$a_n = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \qquad b_n = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi.$$

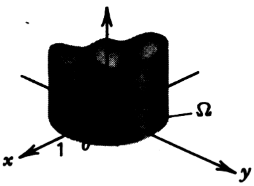


図 2.5b

fがC^1級で周期2πをもつと仮定し，Dini判定を導いたとき，その第一段階はa_nとb_nを代入して，Fourier部分和を

$$s_N^f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(x - s)\, ds\right)$$

の形式にかいたことがあった(問題1.9.6参照)．ここでも同じ道程をたどって，$s_N^u(r, \theta)$に対して，Fourier係数a_nとb_nを$u(r, \theta)$の部分和に代入すると，

$$\begin{aligned} s_N^u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N} r^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)(\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi) d\varphi\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} r^n \cos n(\theta - \varphi)\right) d\varphi. \end{aligned}$$

$f \in C^1$の仮定により，強Dini判定から，境界上のfに対するFourier級数がfに点別に一様収束する．すなわち，$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$に対して一様に$s_N(1, \theta) \to f(\theta)$が知られる．このとき最大値原理を用いて，閉単位球$\overline{\Omega}$上で部分和は一様に収束し，$s_N(r, \theta) \to u(r, \theta)$が，節2.2と同様に示される．よって$r \leqq 1$に対して，点別に

$$u(r, \theta) = \lim_{N\to\infty} s_N(r, \theta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} r^n \cos n(\theta - \varphi)\right) d\varphi.$$

積分演算は，通常収束性を強める．幾何型の級数は積分記号のもとで$r=1$での収束を必要としない．しかしながら，Dini判定の証明に取り入れたDirichlet核，すなわち，

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}$$

を考えたときと同様に，$r<1$に対しこの級数を引き続き考えて，上式の級数がいわゆるPoisson核

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta-\varphi)=\frac{1-r^2}{2[r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)]} \qquad (\sharp)$$

にまとめ上げられることを示そう．それが可能なら，Dirichlet問題に対する解のGreen関数表現の**Poisson公式**

$$u(r,\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}\right]f(\varphi)\,d\varphi, \qquad r<1$$

が得られる．

級数の総和をとるには，Dirichlet核やDini判定の場合にも用いられた“テレスコーピング”の方法によって得られる．発想はPoisson核の公式(♯)の左辺にその右辺の分母を乗じて交差積を作り，消える項を整理することである．この交差積による第一項は

$$[r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)]$$

である．次に級数項を眺めよう．左辺の級数項に，順にr^2，1，$-2r\cos(\theta-\varphi)$を乗じると，それぞれ

$$r^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\theta-\varphi)=r^3\cos(\theta-\varphi)+r^4\cos 2(\theta-\varphi)$$
$$+r^5\cos 3(\theta-\varphi)+\cdots,$$

$$1\cdot\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\theta-\varphi)=r\cos(\theta-\varphi)+r^2\cos 2(\theta-\varphi)$$
$$+r^3\cos 3(\theta-\varphi)+r^4\cos(\theta-\varphi)+\cdots,$$

$$\begin{aligned}-2r\cos(\theta-\varphi)\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\theta-\varphi)=&-2r^2\cos(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi)\\&-2r^3\cos(\theta-\varphi)\cos 2(\theta-\varphi)\\&-2r^4\cos(\theta-\varphi)\cos 3(\theta-\varphi)\\&-2r^5\cos(\theta-\varphi)\cos 4(\theta-\varphi)+\cdots.\end{aligned}$$

これらすべての級数は，比判定法により，$r<1$で一様に絶対収束する．

$$2\cos(\theta-\varphi)\cos n(\theta-\varphi)=\cos(n+1)(\theta-\varphi)+\cos(n-1)(\theta-\varphi)$$

に注目すると，項$-2r^2\cos(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi)$は$r^2\cos2(\theta-\varphi)$と打ち消し合って，項$-r^2$が残り，項$-2r^3\cos(\theta-\varphi)\cos2(\theta-\varphi)$は項$r^3\cos(\theta-\varphi)$と項$r^3\cos3(\theta-\varphi)$を打ち消し，項$-2r^4\cos(\theta-\varphi)\cos3(\theta-\varphi)$は項$r^4\cos2(\theta-\varphi)$と$r^4\cos4(\theta-\varphi)$を打ち消す．以下同様にして，結局，上の三つの級数を加えると

$$2[r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)]\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\theta-\varphi)=2r\cos(\theta-\varphi)-2r^2$$

を得る．これに既に求めてある初項との積を加えて，等式(♯)が得られ，これが**Poisson核の公式**と呼ばれるものである．

後者の公式をもっと明白に，Green関数と関係づけよう．節1.6に従って(またそこでの注意1，2，3参照)，2次元の場合に対するGreen第三等式から，Dirichlet問題

$$\begin{cases}\Omega\text{内で }\Delta u=0,\\ \Omega\text{上}\quad u=f\end{cases}$$

の解は，この問題に対するGreen関数$G(P,Q)$を用いて(図2.5c，ここで一般には$P=(r,\ \theta)$，$\partial\Omega$上$Q=(1,\ \varphi)$，一般には$Q=(\rho,\ \varphi)$)

$$u(P)=-\int\frac{\partial G}{\partial n_Q}(P,Q)f(Q)\,ds_Q$$

と表され，他の項はΩ内で$\Delta_Q u=0$および$Q\in\partial\Omega$で$G(P,Q)=0$の条件によってGreen第三等式において消えてしまう．またGreen関数は一般形

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}}+g(P,Q)$$

をもつことも知られている．ここで，項$g(P,\ Q)$は調和関数で，境界上のQに対して和$G(P,Q)=0$となる様に基本特異関数$(1/2\pi)\ln(1/r_{PQ})$を調整する様に選ばれなければならない．節1.6.1注意3におけると同様

$$G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{OP}r_{QP'}}$$

ととることができる．ここで，余弦公式と像点の定義$P'=r_{OP}^{-2}P$から

$$r_{PQ}^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi),$$

$$r_{QP'}^2=\frac{1}{r^2}+\rho^2-\frac{2\rho}{r}\cos(\theta-\varphi),$$

$$r_{OP}^2\,r_{QP'}^2=1+r^2\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi).$$

よって，

$$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi}\ln[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)]$$
$$+\frac{1}{4\pi}\ln[1+r^2\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)].$$

単位球の境界$\partial\Omega$上で

$$\frac{\partial G}{\partial n_Q} = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=1};$$

従って,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q}\right|_{Q\in\partial\Omega} &= -\frac{1}{4\pi}\cdot\left.\frac{2\rho - 2r\cos(\theta-\varphi)}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\right|_{\rho=1} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\cdot\left.\frac{2r^2\rho - 2r\cos(\theta-\varphi)}{1+r^2\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\right|_{\rho=1} \\ &= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}\right].\end{aligned}$$

前に変数分離法によって到達したPoisson核が実際に, Dirichlet問題の解の直接Green関数表現と一致することが確かめられた.

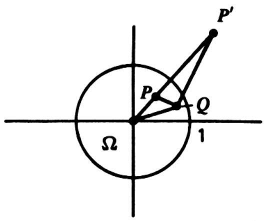


図 2.5c

Fourier級数解とGreen関数解の間の結びつきを示す第三の例として, 次のDirichlet-Poisson問題を考えよう (図2.5d).

$$\begin{cases}\Omega\text{内で } -\Delta u = F(x, y), \\ \partial\Omega\text{上 } \ u = 0.\end{cases}$$

節2.1で示した様に, データをFourier展開して

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \sin nx \sin my$$

とするとき, 次の解を得る.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{nm}}{n^2+m^2} \sin nx \sin my.$$

だが一方でGreen第三等式から一般に, 解がGreen関数表現

$$u(P) = \int_\Omega G(P, Q)F(Q)\, dV_Q$$
$$= \int_0^\pi \int_0^\pi G(x, y, \xi, \eta)F(\xi, \eta)d\xi\, d\eta$$

を用いて与えられることも期待できる．ここで，$P=(x, y)$および$Q=(\xi, \eta)$．変数分離解$u(x, y)$に

$$d_{nm} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi F(\xi, \eta)\sin n\xi \sin m\eta\, d\xi\, d\eta$$

を代入すると，次のGreen関数表現に到る*)．

$$u(x, y) = \int_0^\pi \int_0^\pi \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{(\sin n\xi \sin m\eta \sin nx \sin my)}{(n^2 + m^2)(\pi^2/4)}}_{G(P,\,Q)\,\equiv\, G(x,\, y,\, \xi,\, \eta)} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

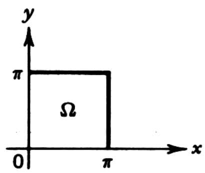


図 2.5d

別のやり方を述べよう．φ_{nm}が正規直交基底ベクトル$(2/\pi)\sin nx \sin my$を表すものとすると，

$$G(x, y, \xi, \eta) = \sum_{n,m} \frac{1}{\lambda_{nm}} \varphi_{nm}(x, y)\varphi_{nm}(\xi, \eta)$$

となり，これは問題

$$\begin{cases} \Omega\text{内で } -\Delta\varphi = \lambda\varphi, \\ \partial\Omega\text{上 } \varphi = 0 \end{cases}$$

の固有関数や固有ベクトルを用いたGreen関数を表す．これは，固有関数が極大正規直交集合を作る様な有界領域上の問題に対する場合の典型である．

問題1． (a)変数変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

*）　形式的には，和と積分の順序交換による．けれどもこれは，Parseval等式と節2.3の定理を参照して厳密になされ得る．休止第3回を見よ．

によつて，標準形

$$u_{tt} - u_{xx} = -4u_{\xi\eta}$$

に変形し(問題1.9.1参照)，d'Alembertの公式を導け(図2.5eがヒントとなろう)．上の変数変換のヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

であることに注意せよ．これはd'Alembertの公式の因数$\frac{1}{2}$を説明している．

(b)　波動純粋初期値問題に対して与えられた一般のd'Alembertの公式を，微分したり，問題へ代入したりして確かめよ．

(c)　解$u(x_0,\ t_0)$が図2.5eの陰影部分にあるデータのみに依存することを理由付けよ．この範囲は**依存領域**と呼ばれる．

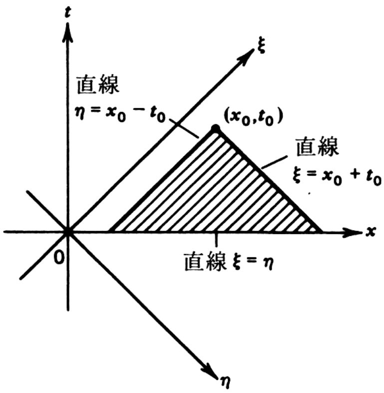


図 2.5e

問題2. (a)収束について心配することなく，上で考えたDirichlet-Poisson問題の場合に

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi G^2(x,\ y,\ \xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy = \sum_{n,m} \frac{1}{\lambda_{nm}^2}$$

を示せ．(b)この量が存在する，すなわち，これが実際に有限であることを確かめよ．(c)従ってこの問題に対して，なぜ次の様にかいてよいのだろうか？

$$u(x,\ y) = \int_0^\pi \int_0^\pi G(P,\ Q)F(Q)\, dV_Q = L^{-1} F(x,\ y)?$$

問題3. 次の波動初期値問題に対して，特定値$u(x_0,\ t_0)$を求めよ．

(a) $u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$
$u(x,0)=x^2,\quad u_t(x,0)=0$に対する$u(100,100)$;

(b) $u_{yy}-4u_{xx}=e^x,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0,$
$u(x,0)=2,\quad u_y(x,0)=1$に対する$u(1/2,3/2)$;

(c) $u_{tt}-u_{xx}=0,\quad 0<x<1,\quad t>0,$
$u(x,0)=1,\quad u_t(x,0)=\sin\pi x,$
$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$に対する$u(1/2,2)$.

★休止　第3回：例題，説明，演習

節2.3と節2.4での記述は，抽象化へと大きくそれた*)．それは二つの一般的定理の範囲内で，応用に現われる多くの特殊関数の展開をまとめるためになされたからである：節2.1で述べられ，そして節2.6で再び解説する様に，この理論のすべては単独の古典的な汎定理によって考えられ，最良の最少2乗あてはめを得たい†)．

例題

節2.3の定理HのParseval等式によると，$u(x)$がHilbert空間$L^2(\Omega,\ r)$の極大正規直交集合$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$によってFourier展開$u=\Sigma_1^{\infty}c_n\phi_n$で与えられるとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\int_{\Omega}u^2r\,dx=\|u\|^2_{L^2(\Omega,r)}.$$

節2.4のSturm-Liouvilleの定理によって，Ωが区間$(a,\ b)$である場合には$L^2(a,\ b,\ r)$は広い範囲で利用できる．それが可能なら，応用する際の最良の選び方は，取扱っている偏微分方程式の厳密な固有関数が知られているとき，$\{\phi_n\}$をそれらにとることである．

上に示した様に，Parseval等式は最良の最小2乗あてはめの原理の一つの例と見なされるべきである．$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$が既に示された様に与えられているとき，この事を示せ．

解答． この事実は次の各項に，既に含まれている．

(i)　休止第2回の，演習問題7に対する解答．

(ii)　節2.3の補助定理2の証明．

(iii)　節2.4の$\{\phi_n=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\sin nx\}$の極大性の直接証明．

*)　抽象的，優雅な，一般的数学は正確な記述という面では優れているが，特定の情報に欠けているという相応の不利益を併せもつ．抽象化と具体化の両極端の間でテーマを選んで研究すべきことは手近にある課題に依存するだろう．

†)　この立場は数理科学において，殆んど強調し過ぎることはない．

従って，一般的証明は明らかであろう．近似

$$u_N(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n\phi_n(x)$$

と，対応する平均2乗誤差

$$\begin{aligned}\int_\Omega(u-u_N)^2dx&=\int_\Omega u^2dx-2\sum_{n=1}^{N}c_n\int_\Omega u\phi_n dx+\sum_{n=1}^{N}c_n^2\\&=\int_\Omega u^2dx+\sum_{n=1}^{N}\left(\int_\Omega u\phi_n dx-c_n\right)^2\\&\quad-\sum_{n=1}^{N}\left(\int_\Omega u\phi_n dx\right)^2\end{aligned}$$

を考えよう．ここで，この誤差の最後の二つの項は完全平方の形にかかれた．調整可能な項は第二項のみで，c_nがFourier係数

$$c_n=\int_\Omega u(x)\phi_n(x)dx$$

に選ばれたとき，これは最良の最少2乗あてはめを与える．

演習問題

1. $\{\phi_n\}$が直交であるが正規化されておらず，重み関数rが1でない場合について，Parseval等式を証明せよ．

2. $n\to\infty$のとき，次を証明せよ．

$$\int_0^\pi(\ln x)(\cos\ nx)dx\to 0.$$

3. $n\to\infty$のとき，次を証明せよ．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\ nx}{\sqrt{|x|}}dx\to 0.$$

4. 節2.5の非同次Dirichlet-Poisson問題，Ω内で$-\Delta u=F$，$\partial\Omega$上で$u=0$，に対して，次の様にかけることを示せ．

$$u=\sum\sum\frac{d_{nm}^F}{n^2+m^2}\sin nx\ \sin my=\iint GF.$$

5. 次のParseval等式の内積形式を証明せよ．

$$\langle u,v\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}c_nd_n.$$

ここで，$u=\sum c_n\phi_n$，$v=\sum d_n\phi_n$．$\{\phi_n\}$は極大正規直交列．

偏微分方程式の変数分離法で，数理物理学に現われる特殊関数のFourier固有関数展開を，（節2.1や節2.4で与えた例からみても明らかな様に）ここで考えるには，内容が余りにも多すぎる．そこで，一つの例すなわち節2.4問題1(b)で要請したHermite関数でもって，もっと詳しく調べよう．この関数は量子力学の調和振動子に現れる固有関数である．

例題

3次元等方性調和振動子のポテンシャル$V=m\omega^2r^2/2$における量子力学的粒子の振舞いは，次のSchrödinger方程式に従う．

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z)+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\Psi(x,y,z)=E\Psi(x,y,z).$$

ここで，$\hbar=h/2\pi\approx1.054\times10^{-34}$ジュール毎秒，$h$はPlanck定数，$m$は粒子の質量，$E$はそのエネルギー，$\omega$はその角振動数，$r$は動径空間座標で$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$に等しい．この偏微分方程式を変数分離法によって，常微分方程式系に帰着せよ．

解答． $\psi(x,\ y,\ z)=X(x)Y(y)Z(z)$から，

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)=E$$

これより，次が結論される．

$$\frac{-\hbar^2}{2m}X''+\frac{1}{2}m\omega^2x^2X=E_xX,$$
$$\frac{-\hbar^2}{2m}Y''+\frac{1}{2}m\omega^2y^2Y=E_yY,$$
$$\frac{-\hbar^2}{2m}Z''+\frac{1}{2}m\omega^2z^2Z=E_zZ.$$

ここで，E_x，E_y，E_zは今のところ任意の定数で，和をとればエネルギーEとなる．

演習問題

6．1次元調和振動子の方程式

$$\frac{-\hbar}{2m}u''(x)+\frac{m}{2}\omega^2x^2u=Eu$$

を無次元の正規形にかえよ．

7. 量子力学の公準では，この様な方程式が固有関数の完全形をもつことが要請される．この事を調和振動子の方程式で示せ．

8. 結果的に現われる固有関数がHermite多項式であることを示せ．

最も有効な極大正規直交集合(ϕ_n)がその様な微分方程式から現われることを強調してきたけれども，すべてそうだと結論してはいけない．

例題

次の**Haar系は**すべての空間$L^p[0,\ 1]$，$1\leqq p<\infty$，に対して基準を形成する．

$$\phi_1(t)=X_{[0,1]}(t)$$
$$\phi_{2^n+j}(t)=2^{n/2}[X_{[0,1]}(2^{n+1}t-2j+2) - X_{[0,1]}(2^{n+1}t-2j+1)].$$

ここで，$j=2^n(n=0,1,2\cdots)$．Haarはこの系を導入して，極大正規直交集合が微分方程式に依らなくても現われることを示した．これらの関数の数個をかき下ろせ（訳 者 注：A.Haar,“Zur Theorie der Orthogonalen Functionensystem”,I, *Math. Ann.*69(1910)，331-371;II,同誌71(1911)，38-53.を参考せよ）．

解答． これらの関数は全く繰り返され，前段階で指定された台区間を半分に切断して，なおも直交性が保たれる．結果を挙げると

$$\phi_1(t)=1,\qquad 0\leqq t\leqq 1,$$

$$\phi_2(t)=\begin{cases} 1, & 0\leqq t<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}<t\leqq 1,\end{cases}$$

$$\phi_3(t)=\begin{cases} \sqrt{2}, & 0\leqq t<\frac{1}{4},\\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{4}<t<\frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}<t<\frac{3}{4},\\ 0, & \frac{3}{4}<t\leqq 1,\end{cases}$$

$$\phi_4(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqq t<\frac{1}{4},\\ 0, & \frac{1}{4}<t<\frac{1}{2},\\ \sqrt{2}, & \frac{1}{2}<t<\frac{3}{4},\\ -\sqrt{2}, & \frac{3}{4}<t\leqq 1\end{cases}$$

等々．

演習関題

9. (a)これらの関数の幾つかのグラフを描き，それらが正規直交であることを証明せよ．(b)それらがある(奇妙な)微分方程式の固有関数として現われないことを，どの様にして確信できるか？(c)Haarの数学への寄与の他の二つは何であるか？

選ばれた問題の解とヒント

1.0　演習問題

1．(a)　$u(x)=c_1x+c_2$. c_1 と c_2 は任意の積分定数，$-\infty<x<\infty$.
　(b)　$u(x)=c_1x+1$. $x\geqq 0$.
　(c)　$u(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$. c_1 と c_2 は任意の積分定数，$0<x<\pi$.

2．(a)　$u(x)=-x+1$. $0\leqq x\leqq 1$.
　(b)　$u(x)=e^{-2x}$. $x\geqq 0$.
　(c)　$u(x)=c_1\sin 2x$. c_1 は任意定数，$0\leqq x\leqq \pi$.

3．(a)　$u(x,\ y)=c_1(y)$. c_1 は y の任意の関数.
　(b)　$u(x,\ y)=c_1(y)x+c_2(y)$. c_2 は y の任意の関数.
　(c)　$u(x,\ y)=c_1(y)x+1$.

節 1.1

1．(a)　$d=y$. よって，この作用素は $y>0$ で楕円型，$y=0$で放物線，$y<0$で双曲線型.
　(b)　$d=1+(u_x)^2+(u_y)^2>0$.

2．(a)　$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，など.
　(b)　C として(a)で与えたものをとると，$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

3．(a)　$u=ax+by+cxy+d$，x^2-y^2，$e^y\sin x$，…….
　(b)　$u=ax+b$，x^2+2t，$e^{-t}\sin x$，…….
　(c)　$u=ax+bt+cxt+d$，x^2+t^2，e^{ax+bt} (ただし $a^2=b^2$)，…….
　(d)　$u=ax+by+cxy+d$，$3x^2-y^3$，…….
　(e)　$u=ax+by+c$.

1.1　演習問題

1．(a)　$d=AC-B^2=8$. よって，この方程式は楕円型. 低階導関数は無視されることに注意.
　(b)　$d=-8$. 双曲型.
　(c)　$d=0$. 放物型. ここで与えられた判別規則は独立変数2個の場合にのみ適用されることに注意.

2．(a)　$\ln r=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ に注意して，微分せよ.

（b）　代入して，確かめよ．$\sqrt{2t}$ がこの解の拡がり（標準偏差σ）として解釈されること，およびその拡がりが t とともに増大することに注意．

（c）　代入して，確かめよ．x と t における対称性はこの関数の解であるべきことを保証することに注意．

3．（a）　直接計算（連鎖規則）によって，

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+2ru_{\xi\eta}+r^2u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy}=u_{\xi\eta}+ru_{\eta\eta},$$
$$u_{yy}=u_{\eta\eta}.$$

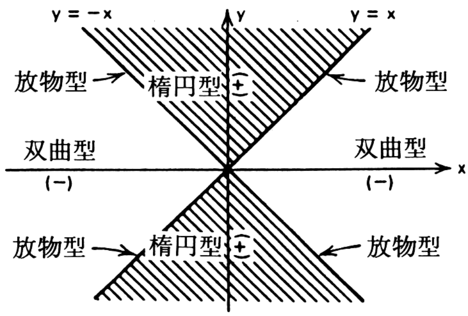
方程式に代入して，

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=Au_{\xi\xi}+(Ar^2+2Br+C)u_{\eta\eta}+2(rA+B)u_{\xi\eta}$$
$$=Au_{\xi\xi}.$$

$r=-B/A$ は，方程式が放物型よって $d=AC-B^2=0$ であるから，$Ar^2+2Br+C=0$ の根であることに注意．

（b）　直接計算し，代入して，項を整理すると，標準形が得られる．積分して，一般解の形を得る．判別式による分類のより細かな議論については，問題1.9.1を見よ．また，波動方程式の完全な積分法については，節2.5を見よ．

（c）　$d=AC-B^2=y^2-x^2=(y+x)(y-x)$ であるから，この方程式は次図で示される型をもつ．



節 1.2

3．（a）　$u=\sin x\cos t$.

1.2　演習問題

1．（a）　1次元Dirichlet問題の解は直線 $u(x)=c_1x+c_2$ である．ただし，c_1 と c_2 は境界データから決められる定数である．Ωが有限区間である内部問題に対して，c_1 と c_2 は2つの与えられた値 $f(-1)$ と $f(1)$ によって，一意に決められ

る．

（b）　ふたたび（a）と同様，微分方程式の一般解 $u(x)=c_1x+c_2$ の係数，c_1 と c_2，は境界のデータから決められる．特に，$c_2=f(0)$．しかし $x=\infty$ での条件の解釈には注意を要する．通常応用では，$x\to\infty$ のとき $u(x)\to 0$ を要求する．そのとき，$f(0)=0$ のときだけ解が存在する．もっと一般的に，$f(\infty)$ が任意の有限量であるなら，解が存在するのは，$f(0)=f(\infty)$ のときで，その場合に限られる（解は水平線）．境界条件として，$f(\infty)=\infty$，$-\infty$，$\pm\infty$が許されるなら，無限個の解が存在して，解の決定や意味づけは可成り漠然としたものになる．

（c）　考察は左非有界領域$\Omega_-=(-\infty,\ -1)$ と右非有界領域$\Omega_+=(1,\infty)$ の両者をもつことを除くと，（b）と同じである．両領域で，解は独立である．非有界外部領域の扱い方の進んだ議論については，節2.7を見よ．

2．（a）　各 x を固定すると，解 $u(x,\ t)$ は t について水平な高さ $f(x)$ をもつ直線である．よって，解集合は $f(x)$ の柱である．

（b）　$u(x,\ t)=f(x)e^{-3t}$．

（c）　$u(x,\ t)=c_1(x)t+c_2(x)=c_1(x)t+f(x)$．ここで $c_1(x)$ は各 x に対して任意である．ODEから，解を一意に決めるにはもう一つ他の初期条件の必要なことを知っている．

3．（a）　$Lu=\lambda u$ のとき，$L(cu)=cL(u)=c\lambda u=\lambda(cu)$．p.2 で述べた線形変換の性質を使え．

（b）　関数 $v_5(x)=\sin 5x$ は5番目の主固有関数で，5番目の固有値$\lambda_5=(5)^2=25$ に対応する．常微分作用素 d^2/dx^2 が線形であるから，v_5 の任意数倍も固有関数の解である．

（c）　ODEから，変数変換 $v=du/dx$ を施すと，与式は変数分離形

$$vdv=\lambda u^3du$$

となり，これから，

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=\frac{\lambda}{2}u^4+c_1.$$

λc^2 で固有解が生成されるけれども，この式を積分せずに，$u=cu_\lambda$ を代入して，λでの固有解の性質が保たれないことに注目することで十分である．非線形固有値問題に関する詳細については，節1.8を見よ．

節 1.3

1．（a）　u_1 と u_2 を同じデータ f に対するDirichlet問題の $C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 級の解とする．このとき，u_1-u_2 はΩで調和で，境界値0をもつ．これから，最大値原理によって，$u_1=u_2$．

（b）　$C^2(\Omega)$ 級は最大値原理を成り立たせるのに必要である．次の反例はこれを示す：$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ のとき $u(x,\ y)=2xy/(x^2+y^2)^2$，$u(0,\ 0)=0$．直接計算すると，$u_{xx}=24xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^4$，対称性によって，$u_{yy}=24(y^2-x^2)/(x^2$

$+y^2)^4$. よって，恐らく $(0,\ 0)$ を除くすべての点で，$\Delta u=0$. 差分商の極限から，$\Delta u(0,\ 0)=0$ も確かめられる．しかるに，$y=x$ に沿って，$u=x^{-2}$ でこれは $x\to 0$ に従って急上昇する．$\Delta u=0$ において，$C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 級の条件は，実際に，u が解析的であることを保証する．

（c）　Ω内で$\Delta u_1=0$, $\partial\Omega$上で $u_1=f_1$, そしてΩ内で$\Delta u_2=0$, $\partial\Omega$上で $u_2=f_2$ の問題に対して，最大値原理から

$$\max_{\overline{\Omega}}|u_1-u_2|\leqq\max_{\partial\Omega}|f_1-f_2|.$$

よって，データ f_1 が f_2 に近いとき，解は接近しており，解のデータに連続的に依存することを示す例である．

2．古典的なやり方で，積分記号のもとで微分せよ．被積分関数の積分核を $t\neq 0$ に対して P と書くと，

$$\begin{aligned}
P&=(4\pi t)^{-1/2}e^{[-(x-y)^2/4t]},\\
P_x&=(4\pi t)^{-1/2}e^{[-(x-y)^2/4t]}\cdot[-2(x-y)/4t],\\
P_{xx}&=(4\pi t)^{-1/2}e^{[-(x-y)^2/4t]}\cdot[-(1/2t)+(x-y)^2/4t^2],\\
P_t&=(4\pi t)^{-1/2}e^{[-(x-y)^2/4t]}\cdot[(x-y)^2/4t^2]\\
&\qquad+e^{[-(x-y)^2/4t]}\cdot[(1/4\pi)^{1/2}(-t^{-3/2}/2)]\\
&=(4\pi t)^{-1/2}e^{[-(x-y)^2/4t]}\cdot[(x-y)^2/4t^2-(1/2t)],\\
&=P_{xx}.
\end{aligned}$$

よって，$u_t-u_{xx}=0$. この解の資性を認めると，解の存在 (1) と解の構成 (1′) を得ている．$t=0$ でただ $u=f$ とおくと，この解はDirichlet問題に対して本文で論じた様に，全くおかしなものとなる．後で，それが $t\to 0$ のとき連続的に初期データになることや，それが関連した正則性 (2′)，安定性 (3)，一意性 (2) をもつことが確立される．数値的近似 (3′) の方法は第 3 章で議論される．

3．(1)　微分方程式の解の存在は，線形常微分方程式の解析的理論によって保証される．係数は連続なことだけが必要である．しかるに，存在の疑問は，境界条件なしには，設定されない．あとで，この問題を考える．構成 (1′) に対しては，ODEで，よくやるべき級数法を用いよう．$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ と仮定する．

始めにこの様な解の一意性 (2) を考えることが好都合である．仮定された級数解を

$$\begin{cases}u_{xx}+4xu=0, & 0<x<2,\\ u(0)=u(2)=0\end{cases}$$

に代入すると，

$$0=2a_2+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+3)(k+2)a_{k+3}+4a_k]x^{k+1}$$

を得る．よって，$a_2=0$, $a_{k+3}=-4a_k/(k+3)(k+2)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$. 境界

条件 $u(0)=0$ から，$a_0=0$．次いで帰納的に，$a_{3k}=a_{3k+2}=0$，$a_{3k+1}=(-1)^k a_1/\prod_{j=1}^{k}(3j+1)(3j)$．よって，形式的級数解として，

$$u(x)=a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k}{\prod_{j=1}^{k}(3j+1)(3j)}x^{3k+1}\right].$$

便宜上，これを $u=a_1\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{3k+1}$ と書こう．収束域を決めるために，比判定法を適用する．

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\cdot\frac{x^{3k+4}}{x^{3k+1}}\right|=|x|^3\lim_{k\to\infty}\frac{4}{(3k+4)(3k+3)}=0.$$

よって，この級数はすべての x に対して，絶対収束する．よって u は実解析的である．

さて，一方の境界条件 $u(2)=0$ を適用すると，$a_1\sum_0^{\infty}c_k 2^{3k+1}=0$ が得られる．級数 $\sum_0^{\infty}c_k 2^{3k+1}$ が消えないことは，例えば，次の様にして示される．

$$\sum_{k=0}^{6}c_k 2^{3k+1}=-0{\cdot}454088581,$$

これに対して，

$$\left|\sum_{k=7}^{\infty}c_k 2^{3k+1}\right|\leqq 2^{22}|c_7|=0{\cdot}000256096.$$

よって，$a_1=0$．従って，$u=0$．もとの問題が線形であったから，この事は一意性を保証する．

さて，解の構成に戻ろう．

$$\begin{cases} u_{xx}+4xu=16, \\ u(0)=0 \end{cases}$$

から，

$$u(x)=a_1\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{3k+1}+8\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{3k+2}.$$

ここで，

$$b_k=(-4)^k\Big/\prod_{j=1}^{k}(3j+1)(3j),\quad c_k=(-4)^k\Big/\prod_{j=1}^{k}(3j+2)(3j+1),\quad k=1,2,3,\cdots\cdots,$$

$b_0=c_0=1.$

また，$2a_2=16$ が用いられた．正しい境界条件 $u(2)=-1$ を適用すると，

$$a_1=\frac{-1-8\sum_0^{\infty}c_k 2^{3k+2}}{\sum_0^{\infty}b_k 2^{3k+1}}.$$

以上をまとめておこう．存在性 (1)，一意性 (2)，正則性（この問題では解析性）(2′) および構成 (1′) が示されている．級数を有限項で打切ったための近似

(3′) は実際に，級数解をとった場合に，構成 (1′) に包含されている．たとえ総和可能であっても，閉じた形式の解は一般に，現実の解の値を計算するとき，近似を必要とする初等関数を含む．

どんな種類の安定性 (3) が欲しいかは，問題や応用に依存する．上記の様なべき級数法に従って，ε_0，ε_2，ε_f をそれぞれ，$u(0)$，$u(2)$ および $0<x<2$ に対する $f(x)=16$ の誤差と仮定しよう．すると，僅かな誤差を含むデータをもつ摂動方程式の解を $\tilde{u}$ で表すとき，（大雑把に言って）

$$\tilde{u}-u\cong\varepsilon_0\alpha(x)+\varepsilon_2\beta(x)+\varepsilon_f(x)\gamma(x).$$

ここで

$$\alpha=\textstyle\sum_0^\infty a_k x^{3k},\ \ \beta=\sum_0^\infty b_k x^{3k+1},\ \ \gamma=\sum_0^\infty c_k x^{3k+2}.$$

また，$a_k=(-4)^k/\prod_1^k(3j)(3j-1)$，$a_0=1$ で，b_k と c_k は上に与えられている．

更に，例えばSturm-Liouvilleの理論を用いて，この例題を研究することも可能であるが，それはここでの 6(=3+3) 個の疑問を説明することで十分である*)．

1.3 演習問題

1．解 $u(x)=ax+b$ の存在性 (a) と一意性 (b) は，（初等微積分学による）構成によって，および境界条件のあてはめによって保証された．データ a，bを変化させたときの解の安定性 (c) の程度は，解をこれら 2 つのパラメタに依存する直線とみなすと，幾何学的に明らかである．

2．1 で指適した様に，構成 (a) は微積分学の知識（この簡単な例題では，図形だけで十分であったが）に依存する．解の正則性 (b) は常微分方程式の場合がそうである様にその解析性である．解の近似 (c) は必要ない．

3．任意のODEの参考書を読んで，微分方程式が一般の条件（例えば，連続な変数係数 $a_i(x)$ をもつ場合）のもとで，2-パラメタ解の族をもつことを見出せ．しかし，境界条件を満す可能性に依存する存在性 (a) および，例えば，$a_0=1$，$a_1=0$, $a_2=\lambda$の場合の一意性 (b) は係数の性質に依存する．構成 (c) はやはりすべての方程式で確固となっていない．

節 1.4

1．(*b*)　解なし．

2．(*c*)　左境界条件 $u(a)=0$ をもつ区間 $[a,\ b]$ 上の $u''(x)=0$ に対して，次の 3 つの境界条件のいずれかで一意な解が存在する．$u(b)=c$，$u'(b)=d$，$u'(b)+ku(b)=0$，ただし $k\neq(a-b)^{-1}$．解は $u(x)=c(b-a)^{-1}(x-a)$．ここで，c は任意に選ばれてよい．

3．(*a*)　$k>0$ に対する解は $u=0$，ただし，$k\neq2$．一意性は $k=0$ でも成り立たな

*) この解は実際に，重要な特殊関数の仲間である (2.9.9(9)を参照)．

いことに注意.

（c）　$f=0$ のとき，この問題は（境界条件で固有値 k をもつ）Steklov固有値問題と呼ばれる．非自明な解の存在が可能である．(a) と (b) に対するODE問題を考えよ．節1.6.1の問題3も見よ．

1.4　演習問題

1．（a）　Dirichlet.　　（b）　Neumann.　　（c）　Robin.

2．（a）　動径方程式 $u'+2r^{-1}u'=0$ から $u_1(x)\equiv c$ と，$u_2(x)=c/r$.

（b）　$x\to\infty$ のとき $u(x)\to 0$ が唯一の解 $u_2(x)$ を与える．

（c）　$\partial u/\partial r=0$ が $u_1(x)\,(c\neq 0)$ のみを与える．

3．問題の線形性によって，任意の可能な異なる解 $u_1(x)$，$u_2(x)$ の差 $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ は次を満す：

$$\begin{cases} u''(x)=0, & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

（a）　幾何学的に，解が $x=0$ と $x=1$ を通る直線であることから，$u(x)$ は恒等的に 0 である．（b）　節1．3の最大値原理は，（ここでは1次元の）調和関数として $u(x)$ もその負 $-u(x)$ もともに境界 $x=0$ と $x=1$ 上で，それぞれの極大値をとると主張する．従って，u の極大値も極小値も共に 0 であるから，関数全体で 0.（c）　$u''(x)=0$ に $u(x)$ を乗じて，部分積分すると，

$$0=\int_0^1 u(x)u''(x)dx=u(x)u'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 (u'(x))^2dx$$

を得る．$u(0)=u(1)$ ゆえ，区間 $0\leqq x\leqq 1$ の到る所で $u'(x)=0$ と結論できる．よって，$u(x)$ は一定で，その境界値によって，恒等的に 0.

節 1.5.1

1．（a）　$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh n(\pi-y), c_n=\dfrac{2}{\pi\sinh n\pi}\int_0^{\pi} f(s)\sin nsds.$

2．（a）　$u_{rr}+r^{-1}u_r+r^{-2}u_{\theta\theta}.$

（b）　$u(r,\theta)=\dfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos nsds,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin nsds.$$

3．（a）　$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\sinh n\pi}\sin nx\,\sinh n(\pi-y),$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}r^n}{n}\sin n\theta.$$

1.5(1)　演習問題

1．(a)　c_n は，$c_1=1$ を除いて，すべて消える．よってFourier級数展開はその基本モードのいずれか一つを，完全に保存する．

(b)　興味ある等式*)

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

は二つの基本モード $\sin x$，$\sin 3x$ を用いて，与えられたデータを表す．よって，$c_1=3/4$，$c_3=-1/4$，他の c_n はすべて 0.

(c)　部分積分すると，偶数の n に対して $c_n=0$，奇数の n に対して $c_n=8/n^3\pi$ を見出す．偶数番目のモードが区間の中点 $x=\pi/2$ について奇関数的であり，それに対して，与えられた関数がその差について偶関数的であるから，偶数番目の係数はすべて消える．同じ注意は(a)，(b)にも適用される．

2．上の演習問題1. で計算されたFourier係数を確かめることだけが必要．

(a)　$u(x,t)=\sin x\cos t.$

(b)　$u(x,t)=\frac{3}{4}\sin x\cos t-\frac{1}{4}\sin 3x\cos 3t.$

(c)　$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi}\sin(2n-1)x\cos(2n-1)t.$

3．変数分離法によって，次の一般解の公式を得る．

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-n^2t}\sin nx.$$

よって，解は上の演習問題2. と同様にして，次で与えられる．

(a)　$u(x,t)=e^{-t}\sin x.$

(b)　$u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-t}\sin x-\frac{1}{4}e^{-9t}\sin 3x.$

(c)　$u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2(n-1)^2t}}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x.$

*）ある相互個人的な交流が，数学の発展と応用に活気を与えた実例を，ここで注目しておきたい．それは，著者が1970年代初期のある日，スイスのGenevaでフォンデュをN.Bazley教授に指適したとき，〝再生非線形性〟の理論となった．この理論の説明や応用については次を見よ．N. W. Bazley, “Approximation of operators with reproducing nonlinearities”, *Manuscripta Math.* **18** (1976), 353-369; P. Rutkowski, “Approximate solutions of eigenvalue problems with reproducing nonlinearities” *J. A. Math. Phys.* (ZAMP), **34** (1983), 310-321.

その内身はde Moivres定理，$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos n\theta+i\sin n\theta]$，から直ちにわかる．にもかかわらず，それは著者の知識では未だ完全に発達していないが，恐らく広い範囲に及ぶ〝非線形Fourier解析の理論〟を示すと思われる．その様な理論の他の例は，例えば，素粒子論のClebsch-Gordanの関係や特殊関数のクラスの範囲での他の基本的な関係にもみられる．

節 1.5.2

1．（b）$G(x,s)=\begin{cases} s, & 0\leqq s\leqq x, \\ x, & x\leqq s\leqq \pi. \end{cases}$

3．（b）　これを行なうには，次のを含めて，数種類の方法がある．

（i）　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$ に注目する．これを確立する一方法は次である．

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds\right]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\ dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\ dr\ d\theta=\pi.$$

（ii）　Poisson核に $s=-\dfrac{x-y}{2t^{1/2}}$ とおくと，

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-y)^2/4t}dy=\pi^{-1/2}\int_{-\delta/2t^{1/2}}^{\delta/2t^{1/2}} e^{-s^2}ds\to 1.$$

（iii）　容易に次が確かめられる．$\delta>0$ を固定して，$t\downarrow 0$ とすると

$$\int_{-\infty}^{x-\delta}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-y)^2/4t}dy\to 0,$$

$$\int_{x+\delta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-y)^2/4t}dy\to 0.$$

（iv）　次に $\varepsilon>0$ とし，f を $-\infty<y<\infty$ のすべての y に対して連続でかつ有界とする（すなわち，$|f(y)|\leqq M$）．与えられた ε に対して，$|x_1-x_2|<\delta$ のとき $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/4$ を満す $\delta>0$ が存在する．また，$|y-x_2|<\delta$ のとき，$|f(y)-f(x_1)|<\varepsilon/2$．上の（i）によって

$$\begin{aligned} f(x_1)&-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x_2-y)^2/4t}f(y)dy \\ &=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left[\int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta}(f(x_1)-f(y))e^{-(x_2-y)^2/4t}dy\right. \\ &\qquad\left.+\int_{(-\infty,x_2-\delta)}^{(x_2+\delta,\infty)}(f(x_1)-f(y))e^{2(x_2-y)^2/4t}dy\right] \end{aligned}$$

であるから，上の（iii）により，T を十分小さく選んで，$0<t\leqq T$ なるすべての t に対して

$$\left|f(x_1)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x_2-y)^2/4t}f(y)dy\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+2M\int_{(-\infty,x_2-\delta)}^{(x_2+\delta,\infty)}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x_2-y)^2/4t}dy<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

1.5(2) 演習問題

1．判別式 $d=b^2-4ac$ によって決定される．
（a） $d>0$,　　（b） $d=0$,　　（c） $d<0$.

2．（a） $y_1(x)=e^{r_1x}$, $y_2(x)=e^{r_2x}$；$y_1(x)=e^{rx}$, $y_2(x)=xe^{rx}$；$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$，ただし $r=\alpha+i\beta$ が根．
（b） $y_p(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ とおき，

$$\begin{cases} c'_1y_1+c'_2y_2=0, \\ c'_1y'_1+c'_2y'_2=f/a. \end{cases}$$

を満すよう要請せよ．
（c） （b）を例えばCramerの規則によって解け．

3．（a） 各 P を固定したとき，成り立つ．（b） 次式が成り立つので正しい．

$$\delta_P(u(Q)+v(Q))=u(P)+v(P)=\delta_P(u(Q))+\delta_P(v(Q)).$$

（c）

$$u(x)=\int_0^{\pi}G(x,s)f(s)ds$$
$$=\underbrace{\int_0^{\pi}\underbrace{G(x,s)\left(-\frac{d^2}{ds^2}\right)}_{\delta(x,s)}}_{\delta_x(s)}u(s)ds.$$

ただし，ds はそれぞれの立場で用いられている．

節 1.5.3

2．（a） $R(v)=10\pi^{-2}\cong1.013$.
（b） $\|v-v_1\|\cong0{,}038$.

1.5(3) 演習問題

1．（a） $a<x<b$ に対する $u''(x)=0$ の解は，指示されたDirichlet境界条件 $f(a)$ と $f(b)$ でとられたすべての関数 $v(x)$ について，$\int_a^b|v'(x)|^2dx$ を極小にすることによって求められる．
（b） 明らかに 0 は下界であり，よって下限が存在する．後で（Poincaréの不等式），この下界を 0 より大きくとれることが示される．

（c）　下限は単に，実際には必ずしも到達しなくてもよい極限である．

2．（a）　方程式に u あるいは u の適切な表現を掛けて，部分積分せよ．

（b）　$u''(x)=0$ から，$uu''=0$，$\int_a^b uu''=0$，よって，$D(v)=vv'|_a^b-\int_a^b vv''$ は第二項を消すように要請して，極小化されることになる．すなわち，$v''=0$.

（c）　大雑把に言って，二つの変分がある．始めは境界上の v' におけるそれであり，次いで領域上の v'' におけるものである．

3．（a）　過剰な正則性を条件として要求することは解を〝失う〟ことになる．上の問題 3 を参照．

（b）　正則性を弱めることは，少なくとも弱解の存在証明を許容する．

（c）　厳密に，正則性の正しい量は，一たん問題が完全に理解されたとき明らかになるだろう．

休止　第一回

1．$c_{2n-1}=4A/(2n-1)\pi$，$c_{2n}=0$．よって，解は

$$u(x,t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}e^{\frac{-k(2n-1)^2\pi^2}{l^2}t}.$$

2．$u(x,\ t)=e^t v(x,\ t)$ とおくと，問題は $v_t-2v_{xx}=0$ になり，境界条件と初期条件は変らない．初期値のFourier係数を計算することは大変労力のいることであるが，最終的に次の解に達する．

$$u(x,t)=\frac{8a}{\pi}e^t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+2}\sin\frac{(4n+2)\pi x}{10}e^{\frac{-2(4n+2)^2\pi^2}{10^2}t}.$$

3．連鎖規則を何度も適用して

$$\Delta u=r^{-2}(r^2u_r)_r+(r\sin\theta)^{-2}(\sin\theta u_\theta)_\theta+(r\sin\theta)^{-2}u_{\phi\phi}=0.$$

次に $u(r,\ \theta,\ \phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ を代入せよ．

4．
$$u(x,t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{k(2n-1)\pi}{l}t.$$

5．v が次を満すように，$g(x)$ を決定せよ．

$$\begin{aligned}&v_t-v_{xx}=0,\qquad 0<x<1,\qquad t>0,\\&v(0,t)=v(1,t)=0,\qquad t\geqq 0,\\&v(x,0)=f(x)-g(x).\end{aligned}$$

次いで，この方程式を解け．

6．$\lambda=0$ に対して，$u(x)=c_1+c_2x+\int_0^x(x-s)f(s)ds$．$\lambda<0$ に対して，

$$u(x)=c_1e^{(-\lambda)^{1/2}x}+c_2e^{-(-\lambda)^{1/2}x}+(-\lambda)^{1/2}\int_0^x \sinh((-\lambda)^{1/2}(s-x))f(s)ds.$$

次いで，境界条件を付し，係数をc_iを定め，解を確認せよ．

7．直接計算するか，上式に次を代入せよ．

$$G(x,s)=\begin{cases}-\sin s\cos x, & 0\leqq s\leqq x,\\ -\sin x\cos s, & x\leqq s\leqq \pi/2.\end{cases}$$

$f(x)=x$ に対する解は $u(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$.

8．$G(x,s)=\begin{cases}[\cos(x+s)+\sin(x-s)]/2, & 0\leqq s\leqq x,\\ [\cos(x+s)-\sin(x-s)]/2, & x\leqq s\leqq \pi/2.\end{cases}$

$u(x)=\frac{\pi}{4}(\cos x-\sin x)-\sin x+x.$

9．(*a*)　ODE.

(*b*)　部分積分法.

(*c*)　すべてのより短い長さの試行関数は，拡張されたときのより長い長さの変分商に対する試行関数である．

節 1.6.1

1．零データからは零解しか導けないことを示すことは，含まれる作用素の線形性で十分である．(これを線形作用素に対する有用な一般的な補助定理として，書き下ろせ．) したがって，f と g の正則性それ自体は重要でない．正則領域または発散定理領域と $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ の関数を仮定する．すると，Greenの第一等式と零データから，

$$\int_\Omega |\mathrm{grad}\, u|^2 dx=\oint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_\Omega u\Delta u=0.$$

よって，u はΩ上で一定である (その理由を述べよ)．u は$\overline{\Omega}$上で連続と仮定したので，そこでは $u=0$.

1.6(1)　演習問題

1．(*a*)　発散定理によって

$$\frac{1}{3}\oint_{\partial\Omega} x\cdot n=\frac{1}{3}\int_\Omega \mathrm{div}(x)dV=\mathrm{Vol}(\Omega).$$

(*b*)　上の(*a*)と同様に計算せよ．

（c）
$$\mathrm{Vol}(\Omega)=\frac{1}{m}\oint_{\partial\Omega}x\cdot n=\frac{1}{m}\oint_{\partial\Omega}x\cdot\frac{x}{|x|}=\frac{r}{m}\oint_{\partial\Omega}ds=\frac{r}{m}\mathrm{Area}(\partial\Omega).$$

2．（a）および（b）　次の関係式がここで役に立つ．

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m(\theta)d\theta=\frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2}\cos^{m-2}(\theta)d\theta.$$

（c）　$\mathrm{Vol}(B_4(r))=2r\mathrm{Vol}(B_3(r))\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta=\pi^2r^4/2,$

$$\mathrm{Area}(S_4(r))=\frac{4}{r}\mathrm{Vol}(B_4(r))=2\pi^2r^3.$$

3．（a）　$u''=0$ の解は形式 $u(x)=ax+b$ をもつ．任意の r に対して，

$$\frac{1}{\omega}\oint_{r_{PQ}=r}u(Q)ds_Q=\frac{1}{2}[u(-r)+u(r)]=b=u(0).$$

（b）　$\sigma(t)=(r\cos t,\ r\sin t)$，$t\in(0,\ 2\pi)$ を $r_{PQ}=r$ のパラメタ化とする．このとき

$$\frac{1}{\omega_2 r}\oint_{r_{PQ}=r}u(Q)ds_Q=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}u(\sigma(t))|\sigma'(t)|dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[a\cos(t)+b\sin(t)+c]=c=u(0).$$

（c）　平均値定理から，$u(x)=[u(x+r)+u(x-r)]/2$．Taylor定理を用いて，

$$u''(x)=\lim_{r\to0}\frac{u(x+r)-2u(x)+u(x-r)}{r^2}=0.$$

節 1.6.2

2．（a）　$\lambda_n=\inf\int_\Omega|\mathrm{grad}u|^2dx/\int_\Omega u^2dx$．ここで，下限は上の固有値$\lambda_1$，……，$\lambda_{n-1}$に対応するすべての固有関数に直交する十分に正則な u すべて（すなわち，その様なすべての u_k に対して，$\int_\Omega uu_kdx=0$）の上でとられる．

（b）　$\lambda_{mn}=m^2+n^2(m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$；$u_{mn}=c_{mn}\sin mx\sin ny$，$c_{mn}$ は任意．

3．（a）　$a\leqq c_1b_1+c_2b_2\Longrightarrow a^2\leqq(1+\varepsilon)c_1{}^2b_1{}^2+(1+\varepsilon^{-1})c_2{}^2b_2{}^2,$

$a^2\leqq c_1b_1{}^2+c_2b_2{}^2\Longrightarrow a\leqq\sqrt{c_1}\,b_1+\sqrt{c_2}\,b_2.$

（b）　$\|u\|_\Omega\leqq\|u\|_{\partial\Omega}+c_3\|\Delta u\|_\Omega$．ここで，$c_3=\max_{Q\in\partial\Omega}d^2(0,\ \Omega)/2n$．$\|\cdot\|_S$ は n 次元の集合 S 上の極大値を示す．原点 0 はΩ内の最も有利に選ばれた．

（c）　間接的に，また，鋭い有界性に対して，それは領域Ωの図形，および∂Ω上の u の勾配と接線方向微係数との間の関係で研究することを含む*)．

*）例えば次を見よ．L. E. Payne and H. F. Weinberger, "New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations," *Pac. J. Math.* 8 (1958), 571-573

$|u(P)|^2$ に対するその様な有界性は，節1.6.1の注意3で与えられたPoisson積分公式から，Ω内の各点 P で，要請された$\int_\Omega u^2$ に対してでなく，次の様にして得られる．そこでと同様，次が成り立つ（これは任意の好適な有界領域Ωに対して成り立つ）

$$u(P)=-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}u\,ds.$$

これから（Schwarz不等式によって）

$$u^2(P)\leqq\oint_{\partial\Omega}r_{PQ}\frac{\partial r_{PQ}}{\partial n}\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 ds_Q\cdot\oint_{\partial\Omega}\left(r_{PQ}\frac{\partial r_{PQ}}{\partial n}\right)^{-1}u^2(Q)ds_Q.$$

計算して

$$\frac{\partial r_{PQ}}{\partial n}\cdot\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r_{PQ}}$$

なる事実を用いると，第一因子は$\omega_n{}^{-1}$に等しい．ここで，ω_nは n 次元の単位球面の面積である（節1.6.1注意1を見よ）．よって，

$$u^2(P)\leqq\frac{1}{m_P\omega_n}\oint_{\partial\Omega}u^2ds.$$

ここで，m_P は∂Ω上の $r_{PQ}\partial r_{PQ}/\partial n$ に対する正の下界である．後者は，例えばΩが凸なとき，すべての P に対して存在する．

さて，m_P は一様でなく，そして∂Ωに近づくとき0になり得るので，Ωのすべての P について上で得た不等式を一般化して，$\int_\Omega u^2$ に対する限界を求めようとするときの困難を知ることができる．

しかるに，要請された限界の存在は，次の様にしてわかる．1.6.2(1″)で示した様に，Ω内で$\Delta u=0$ に対して要請された限界$\int_\Omega u^2\leqq c\oint_{\partial\Omega}u^2$ が得られることは，∂Ω上で$\psi=0$ に対する限界$\oint_{\partial\Omega}(\partial\psi/\partial n)^2\leqq k\int_\Omega(\Delta\psi)^2$が得られることと同値であった．後者に対し，嚙み締め平板のSteklov固有問題

$$\begin{cases}\Omega\text{内で} & \Delta^2\psi=0,\\ \partial\Omega\text{上で} & \psi=0,\\ \partial\Omega\text{上で} & \Delta\psi=\lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\end{cases}$$

を考える．このとき，Green第二等式から，

$$\oint_{\partial\Omega}\psi\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial n}-\oint_{\partial\Omega}\lambda\frac{\lambda\psi}{\partial n}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\int_\Omega\Delta\psi\Delta\psi.$$

よって，

$$\lambda=\int_\Omega(\Delta\psi)^2\Big/\oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2.$$

固有値は離散的で，すぐ上で示した様に，負ではない．第一固有値λ_1が0でない

ことは容易に確かめられ，よって，上で要請された k は λ_1^{-1} にとってよい．

1.6(2)　演習問題

1．(a)　$x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ と $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ に対して，
$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \leqq (x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)^{1/2}(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)^{1/2}$.

(b)　関数 u，v に対して，

$$\int_\Omega \text{grad}\ v(x)\cdot \text{grad}\ v(x) \leqq \left(\int_\Omega (\text{grad}\ u(x))^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\text{grad}\ v(x))^2\right)^{1/2}.$$

(c)　ベクトル $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots)$ と $y=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\cdots)$ に対して，
$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\cdots \leqq (x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots)^{1/2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2+\cdots)^{1/2}$.

(b)と(c)両方に対して，用いられた量はすべて存在すると仮定した．

2．(a)　$((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{1/2} \leqq ((x_2-z_1)^2+(x_2-z_2)^2+(x_3-z_3)^2)^{1/2}+((z_1-y_1)^1+(z_2-y_2)^1+(z_3-y_3)^2)^{1/2}$.

(b)　$$\left(\int_\Omega (\text{grad}(u+v))^2\right)^{1/2} \leqq \left(\int_\Omega (\text{grad}\ u)^2\right)^{1/2}+\left(\int_\Omega (\text{grad}\ v)^2\right)^{1/2}.$$

(c)　(a)の結果に……を加える．

3．(a)　Dirichlet積分は，n次元空間のある閉領域Ω上の関数 u，v を考えていることを前提とする．このとき，

$$\text{grad}v\cdot\text{grad}u=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$ ，これは R^n の内積．

(b)　左辺の 2 乗は14884，右辺の 2 乗は14938.

(c)　近い．

節 1.6.3

2．(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

(b)　$0\leqq x<\pi$ に対して $f(x)=x$ に，また $x=\pi$ で 0 に点別に収束し，$[0,\ \pi]$上で一様収束でなく，$f(x)$ に根平均 2 乗の意味で収束する．

1.6(3)　演習問題

1．(a)　項別微分可能を仮定して，

$$u'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=u(x).$$

係数を等置して，$na_n=a_{n-1}$，また $u(0)=1$ から $a_0=1$.

よって，$a_n=1/n!$ 従って，$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$.

（b）　始めの仮定により，$u(x,\ t)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,\ 0)t^n$,

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n+2}u}{\partial t^n\partial x^2}(x,0)t^n\bigg|_{t=0}=2.$$

よって，$u(x,\ t)=x^2+2t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,\ 0)t^n$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]&=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n+2}u}{\partial t^n\partial x^2}(x,0)t^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n+2}u}{\partial t^n\partial x^2}(x,0)t^{n-1}.\end{aligned}$$

よって，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ 0)=0$，また同様にして $n\geqq 2$ に対して $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,\ 0)=0$. 従って，$u(x,\ t)=x^2+2t$.

（c）　（b）と同じ技法を用いて，$u(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\sin(x)t^n=\sin(x)e^{-t}$.

2．（a）　$\int_0^x e^s ds=x+x^2/2!+\cdots=e^x-1$.

（b）　$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|$.

（c）　定理Dを用いて，$u'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(d/dx)x^n/n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1/(1-x)$（幾何級数）．このとき，

$$\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{1-x},\\ u(0)=0\end{cases}$$

を解いて，$u(x)=-\ln(1-x)$ を得る．

3．（a）　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$を用いて，連鎖規則から

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial\theta}&=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

これを行列で書くと，

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}$$

反転して，

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta\\ r\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r}\\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}\end{bmatrix}$$
$$=\langle\cos\theta,\ \sin\theta\rangle\frac{\partial}{\partial r}+\langle-\sin\theta,\ \cos\theta\rangle\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

（b）
$$\Delta_2 r^m=\frac{\partial^2}{\partial r^2}r^m+r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}r^m+r^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}r^m=m(m-1)r^{m-2}+mr^{m-2}$$
$$=m^2r^{m-2},$$
$$\mathrm{grad}\,r^m=(\cos\theta,\ \sin\theta)\partial(r^m)/\partial r=mr^{m-1}(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

（c）（a）と（b）から，項別微分して
$$u=1+r+r^2+\cdots+r^m+\cdots$$
$$\Delta u=0-r^{-1}+4+9r+16r^2+\cdots+m^2r^{m-2}+\cdots$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{grad}(1+r+r^2+\cdots+r^m+\cdots)\cdot n$$
$$=(0+1+2r+\cdots+mr^{m-1}+\cdots)(\cos\theta,\ \sin\theta)\cdot n.$$

$r=R<1$ 上で，後者を項別に積分すると，

$$\oint_{r=R<1}\frac{\partial u}{\partial n}ds=2\pi R(1+2R+\cdots+mR^{m-1}+\cdots)$$
$$=2\pi(R+2R^2+\cdots+mR^m+\cdots).$$

ここで，この球面上で $n=(\cos\theta,\ \sin\theta)$．他方，体積積分は

$$\iint_{r\leqq R}\Delta_2 u\ rdrd\theta=2\pi\int_0^R(1+4r+9r^2+\cdots+m^2r^{m-1}+\cdots)dr$$
$$=2\pi r(R+2R^2+\cdots+mR^m+\cdots).$$

休止　第二回

1．$\Lambda_n=\int_\Omega|\Delta u_n|^2/D(u_n)$ はGreenの等式からわかる．このとき，変分的特徴付けは，その証明にはより細かな注意を払う必要があるけれども，経験から形式的に書き下ろしてよい．適切な議論として，節1.9.5(3)と節2.6参照．

2．$\partial\Omega$上で，$u=0$ と $\partial u/\partial n\equiv\mathrm{grad}u\cdot n=0$ の両者を用いよ．前者は$\partial\Omega$上の接微係数$\partial u/\partial\tau=0$ を保証する．

3．$\Lambda_1=\lambda_2$なのは，Ωがn次元球で，かつその場合に限られる．そのとき，試行関数は u_{xi} そのものである．

4．これは固定膜問題と同値である．$\Delta(\Delta u+\Lambda u)=0$ と境界条件から，平板固有関数はまた，同一振動数での膜のそれである．逆については，膜固有関数の十分な正則性だけが必要である．

5．Greenの第二等式によって，Steklov固有値は次で与えられる．

$$\mu=\int_{\Omega}(\Delta\psi)^2\Big/\oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2.$$

これらの固有値は正である．なぜなら，もしそうでないなら，$v=\Delta\psi$はΩと$\partial\Omega$のすべての点で0であり，よってψは恒等的に0．よって，Dirichlet-Poisson限界の定数$k(\Omega)$を$k=\mu_1^{-1}$ととることができる．

6．Schwarz 不等式によって

$$\int_a^b|h(x)|\cdot\chi_{(a,b)}(x)dx\leqq\left(\int_a^b 1dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b|h(x)|^2dx\right)^{1/2},$$

よって，$L^2(a,\ b)$の任意のhに対して

$$\int_a^b|h|dx\leqq\sqrt{b-a}\left(\int_a^b|h|^2\right)^{1/2}.$$

7．これは，Fourier係数がhへの最良の最小2乗$\{\phi_N\}$のあてはめとなっている興味ある性質からわかる．すなわち，任意の部分和$S_M=\sum_{N=1}^M c_N\phi_N$に対して，

$$\begin{aligned}\int_a^b(h-S_M)^2dx&=\int_a^b h^2dx-2\sum_{N=1}^M c_N\int_a^b h\phi_N dx+\sum_{N=1}^M c_N^2\\&\geqq\int_a^b h^2dx-\sum_{N=1}^M c_N^2.\end{aligned}$$

ここで，あとの極小値は$c_N=\int_a^b h\phi_N$ $(N=1,\ \cdots\cdots,\ M)$から得られる．このとき

$$\sum_{N=1}^M c_N^2\leqq\int_a^b h^2dx<\infty$$

はMに依存せず，よってFourier係数の2乗値の級数は収束し，よって必然的に，$N\to\infty$のとき$c_N\to0$．実際（節2.3参照），$\{\phi_N\}$が完備な正規直交集合であるとき，級数$\sum_{N=1}^\infty {c_N}^2$は厳密に$\int_a^b h^2dx$になる．この結果はParsevalの等式あるいは定理と呼ばれる．

8．古典的なϕ_Nは実際，それらのL^2積分$\int_{-\pi}^{\pi}\phi_N^2(x)dx$が$N$によらないという性質が追加される．Diniの$\phi_N$に対し，1.9.6(2)のヒントを用いよ．

9．(*a*)　ここでは滑らかな$\partial\Omega$の場合のみを考える*)．$\partial\Omega$をパラメタsを用いて，$x=x(s)$，$y=y(s)$と表わすとき，弧長，長さ，面積は次で与えられる．ここで，sは0からLまで動くものとする．

*）等周不等式の記述や証明の完全に厳格であるためには，円板と同型なすべての範囲を記述する複素解析のJordan曲線定理の説明から始めるのが，賢明の様にみえる．

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2, \qquad L=\int_0^L \sqrt{(\dot{x}(s))^2+(\dot{y}(s))^2}ds,$$
$$A=\frac{1}{2}\int_0^L (x\dot{y}-y\dot{x})ds.$$

関数 $x(s)$, $y(s)$ およびそれらの導関数のFourier級数表現を用いるには，$t=(2\pi s/L)-\pi$とパラメタを変更した方が便利である．L の式で，平方根の積分を実行することを避けるために，$(dx/ds)^2+(dy/ds)^2=1$，よって，$(dx/dt)^2+(dy/dt)^2=(L/2\pi)^2$，に注目すればよい．すなわちこの定数式を積分すると

$$2\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+\tilde{a}_n^2+\tilde{b}_n^2).$$

ここで，次のFourier表現が用いられた（節1.5.1参照）．

$$x(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$
$$y(t)=\tilde{a}_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos nt+\tilde{b}_n\sin nt),$$
$$\dot{x}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nt-na_n\sin nt),$$
$$\dot{y}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\tilde{b}_n\cos nt-n\tilde{a}_n\sin nt).$$

t をパラメタとする面積の公式は次の様になる．

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(x(t)\dot{y}(t)-y(t)\dot{x}(t))dt=\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n\tilde{b}_n^2)$$
$$\leqq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2+b_n^2+\tilde{a}_n^2+\tilde{b}_n^2)\leqq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+\tilde{a}_n^2+\tilde{b}_n^2)$$
$$=L^2/4\pi,$$

これによって，等周不等式が証明された．等周不等式の証明で中心的な役割を演じたのは，算術平均と幾何平均間の不等式の使用であった．

上で，Fourier係数の総和が三角関数の直交関係から，形式的に直接得られることに注意しよう．もっと一般的に，それらは任意の二つのFourier表現 $u=\sum_n c_n\phi_n$，$v=\sum_n d_n\phi_n$ の内積 $\langle u, v\rangle=\sum_n c_n d_n$ に対するParsevalの等式の一例とみされるべきである．節2.3と休止第三回を見よ．

（b）　左辺を$\sqrt{\cdot}$と書く．そのとき Schwarz 不等式は

$$\dot{x}(s)\int_a^b \dot{x}(t)dt+\dot{y}(s)\int_a^b y(t)dt\leqq(\sqrt{\cdot})\sqrt{(\dot{x}(s))^2+(\dot{y}(s))^2}.$$

これを s について積分して，$\sqrt{\cdot}$ で割ると，要請された不等式が得られる．

(c) (b)の左辺は(a)の条件のもとで0. よって, L の興味ある下界を与えるには, 十分な鋭さをもたない.

節 1.7.1

2. $\frac{\text{cal}}{\text{cm deg}}\cdot\frac{\text{deg}}{\text{sec}}=\frac{\text{cal}\cdot\text{cm}}{\text{deg}\cdot\text{sec}}\cdot\frac{\text{deg}}{\text{cm}^2}.$

節 1.7.2

1. 直接, Greenの第二等式から,

$$\mu=\frac{\int_\Omega(\varDelta u)^2}{\int_\Omega u^2}=\frac{\int_\Omega(\varDelta u)^2}{D(u)}\frac{D(u)}{\int_\Omega u^2}\geqq\varLambda_1\lambda_1.$$

座屈嚙み締め平板, 固定膜それぞれの第一固有値Λ_1, λ_1はともに正である.

2. (a) まず, 対称性によって, $u'(0)=u'(1/2)=u'(1)$ に注目せよ.
   (b) $v''(x)+(v''(x)-2\lambda)v(x+1/2)=0.$
3. 失敗するはず. 主な困難は電子一電子相互作用を表現する項にある.

節 1.7.3

1. 変わる. 第一固有関数は単連結でないΩ上で符号を変えるかもしれないことが知られている*).
2. 実用的な目的で, 最も重要な未解決の疑問は流れの近似(3′)(例えば, 3次元で, 数値的に)である. この問題は(例えば, 空力設計への)多くの重要な応用をもち, 最近細かな点まで研究されている. 付録Cを見よ. 理論的な目的で, 積年の問題はLerayの予想†)であって, それは特異点が3次元流れの履歴で, 可成り"常に"成長することを述べている. これは正則性(2′)の問題で, 存在(1)と一意性(2)を説明する上で, 影響大である.
3. これは3体問題である.

1.7 演習問題

1. これは丁度, 消える境界項をもつGreenの第二等式である. 作用素の自己共役性のより詳しい意味づけに対しては, 節1.9.7(1)を見よ.
2. $w=\varDelta u+\Lambda u$ とおく. すると

$$\begin{cases}\Omega\text{内で} & \varDelta w=0,\\ \partial\Omega\text{上で} & w=0.\end{cases}$$

*) 次を見よ. R.J.Duffin and D.H.Shaffer, "On the modes of vibration of ring-shaped plate" (abstract) *Bull. Amer. Math. Soc.* **58** (1952), 652.

†) J.Leray. "Sur le mouvement d'une liquide visqueux emplissant l'espace" *Acta Math.*, **63** (1934), 193-248.

よって，Ωで$w=0$. 従って，この問題は（正則性条件を法として）次の振動膜の問題へ簡単化される.

$$\begin{cases} \Omega\text{内で} & -\Delta u=\Lambda u, \\ \partial\Omega\text{上で} & u=0. \end{cases}$$

3．できそうにない．もしできるなら，流体動力学の数多くの関連問題が，解析的に解かれているはずだ．付録Cを見よ.

節 1.8

1．（a）　$x=\pm\int_{\phi_0}^{\phi}[2\lambda(\cos s-\cos\phi_0)]^{-1/2}ds.$

3　（b）　方程式の両辺にu'を掛けて積分し，$u(x)=\ln v(x)$とおくと，解として$u(x)=\beta-2\ln(\cosh(e^{\alpha/2}x))$を得る．$\alpha$と$\beta$は任意であるが，境界条件によって，$\lambda=2e^{\alpha-\beta}$に規制される.

問題 1.9.1

（i）　$d=AC-B^2=-5/4$，よって双曲型．変換

$$\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}$$

によって，次の方程式に変換される.

$$u_{\zeta\zeta}-20u_{\eta\eta}-u_{\zeta}-6u_{\eta}=0.$$

（ii）　$d=15/4$，よって楕円型．回転

$$\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}$$

で，$\theta=45^\circ$とおくと，次になる.

$$(2.5)u_{\zeta\zeta}+(1.5)u_{\eta\eta}+u=0.$$

（iii）　$d=-16$，よって双曲型．変換

$$\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 12\\ -1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}$$

によって，

$$u_{\zeta\zeta}-u_{\eta\eta}+3u_{\zeta}-2u_{\eta}+u=0.$$

問題 1.9.2

（a）　$d=AC-B^2=\sin^2x-1=-\cos^2x$．よって，$(2n-1)\pi/2$以外のすべての$x$に対して，方程式は双曲型．直線（$((2n-1)\pi/2,\ t)$）に沿って，放物型．特性方程

式 $dx/dt=1\mp|\cos x|$ から，特性曲線は

$$t=-\cot x-\csc x+c_1,$$
$$t=-\cot x+\csc x+c_2.$$

(*c*)　$y\leqq 0$ に対して $dx=\pm\sqrt{-y}\,dy$. これは分離可能なODEであり，よって特性曲線は $x=\pm\frac{2}{3}y^{3/2}+c$.

問題 1.9.3

(*b*)　$v=u+\frac{1}{4}(x^2+y^2)\max_{\bar{\Omega}}|\Delta u|$ とおけ．すると $\Delta v\geqq 0$，よって，Ωにおいて，$v\leqq\max_{\partial\Omega}u+\frac{R^2}{4}\max_{\bar{\Omega}}|\Delta u|$. よって，$u\leqq\max_{\partial\Omega}u+\frac{R^2}{4}\max_{\bar{\Omega}}|\Delta u|$. $-u$ についても同じ評価をして，結果を得る．$f_1\sim f_2$, $F_1\sim F_2$ とすると，これから互いに近いデータをもつ２つのDirichlet-Poisson問題

$$\begin{cases}\Omega\text{内で} & \Delta u_1=F\\ \partial\Omega\text{上で} & u_1=f_1\end{cases},\quad\begin{cases}\Omega\text{内で} & \Delta u_2=F_2\\ \partial\Omega\text{上で} & u_2=f_2\end{cases}$$

の安定性

$$|u_1-u_2|\leqq\max_{\partial\Omega}|f_1-f_2|+\frac{R^2}{4}\sup_{\Omega}|F_1-F_2|$$

がわかる．

(*d*)　例えば，脚注の著書*)を見よ．

問題 1.9.4

(*b*)　縮小写像定理はそれ自体容易に証明される．空間 X の任意の点 x_0 から始める．$F(x)$ を縮小写像，$x_n=F(x_{n-1})=F^n(x_0)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を x_0 の n 回反復写像とする．F が縮小的（正確にいうと，強縮小的）であるといわれるのは，ある $0\leqq r\leqq 1$ が存在して

$$\|F(x)-F(y)\|\leqq r\|x-y\|\qquad(x,y\in X)$$

とできるときである（そしてこのとき，完備なノルム空間を考えると，証明はノルム $\|x-y\|$ を一般の距離関数 $d(x, y)$ でおきかえたすべての完備な距離空間に対して同等である）．この様にしてすべての $m\geqq n>N$ に対して，

*) M.H.Protter and H.F.Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967)(訳者注，修正版 Springer, 1984).

$$
\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|F^N(F^{m-N}(x_0) - F_N(F^{n-N}(x_0))\| \\
&\leqq r^N[\|F^{m-N}(x_0) - F^{m-N-1}(x_0)\| + \|F^{m-N-1}(x_0) - F^{m-N-2}(x_0)\| \\
&\quad + \cdots + \|F^{n-N+1}(x_0) - F^{n-N}(x_0)\|] \\
&\leqq r^N[(r^{m-N-1} + r^{m-N-2} + \cdots + r + 1)\|x_1 - x_0\|] \\
&= r^N\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{m-N}}{1-r}\right)\|x_1 - x_0\| \\
&< r^N\frac{\|x_1 - x_0\|}{1-r},
\end{aligned}
$$

ここでは，三角不等式および幾何級数の和が用いられた．$N\to\infty$のとき，$\|x_m - x_n\|\to 0$，また空間Xの仮定された完備性から，(一意な)極限点$x=\lim_{n\to\infty}x_n$が存在する．写像Fの連続性（縮小写像の連続なことは容易に示される）から，

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F(x_{n-1})=\lim x_n = x.$$

よって，xはX上の関数Fに対する（唯一つの）不動点である．

ここで，２つの注意を順に述べる：

まず，縮小写像定理の極端に簡単な例があることを念頭におかなければならない．それは，正の傾きaをもつ直線

$$F(x)\equiv y(x)=ax+b$$

である．$a\equiv r<1$に対し，直線は不動点の直線$y\equiv x$と交わるが，$a\equiv r\geqq 1$に対しては，必ずしもそうではない．

第二は，縮小写像定理，逐次近似法，Picardの定理そしてCauchy-Kowalewski定理でさえも，収束幾何級数による優級数化を用いて，すべて証明されていることである．

問題 1.9.5(1)

(*a*)　Dirichlet問題に関するDirichletの講義は，彼の没後，次の形で出版された．P.G.Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte,* Ed.：P.Grube, Leibzig, 1887.

(*b*)　この問題には父子が関係した．もっとも，息子のCarlに対して，彼の名が与えられた様である．

問題　1.9.5(2)

(*a*)　発散定理領域は可成り一般的である——概略的に，述べられ得るものよりずっと一般的である．例えば，$\partial\Omega$に対する接平面にある有限個の不連続を無視することができる．ただし，各境界点が余りかけ離れていないものとする．一般

的な許容可能な領域は，大体次の様につくり上げられる．

正規領域	$\subset$	正則領域	$\subset$	発散定理領域
(節１．６．１と同様)		(正規領域で近似可能)		(正則領域によって近似可能，およびそれ以外)

Dirichlet領域も非常に一般的で，(例えば２次元で)発散定理領域にとっては受け入れられない裂目や切り口が許容される．

(b) 例えば，Dirichlet問題が任意の領域に対して可解でないことを最初に示したのは，Zaremba*)であって，Lebesgueでなかった．

問題 1.9.5(3)

(b) 与えられたEuler方程式に対して，一個以上のラグランジァンが存在できる†)．

(c) $L=\frac{1}{2}(u_t^2-u_x^2-u_y^2)$.

問題 1.9.6(1)

(a) 抽象的にとられた発散定理は n 次元空間へ一般化された微積分学の基本定理であるけれども，その歴史的な起源は19世紀前半のGreen，Gaussその他により流体とみなされて研究された電気や磁気の物理学理論にあった．George Greenの仕事は，彼の生存中は余り認められず，死後，William Thomson卿，Gabriel Stokes卿，Rayleigh卿，Clerk Maxwellを包含する数理物理学のCambridge学派を鼓吹した．

問題 1.9.6(2)

(b) 他の判定法の例として，次のDini判定とその（概観的）証明を与えよう：$f\in C^0[-\pi,\pi]\cap PC^1[-\pi,\pi]$ を $f(-\pi)=f(\pi)=0$ であるとする．このとき $s_N{}^f\to f$ は一様な点別収束である．

証明：(i) 仮定された様に f は絶対連続であるから，f' に対するFourier係数 a_n'，b_n'はそれぞれ，部分積分法によって，nb_n，$-na_n$ である．(ii)よって

$$\begin{aligned}|(s_N^f-s_M^f)(x)|&\leqq\sum_{M+1}^{N}(a_N^2+b_n^2)^{1/2}\\&\leqq\left[\sum_{M+1}^{N}\frac{1}{n^2}\right]^{1/2}\left[\sum_{M+1}^{N}((a_n')^2+(b_n')^2)\right]^{1/2}\\&\leqq\frac{\|f'\|^2}{M^{1/2}}.\end{aligned}$$

(iii) f の部分和 $s_N{}^f$ はこの様に，一様なCauchy列であり，x に依らずに
$|f(x)-s_M(x)|\leqq M^{-1/2}\|f'\|_{L^2(-\pi,\pi)}$

*) S.Zaremba, *Acta Mathematica* **34** (1911), 293-316.

†) この種の疑問に関して興味ある最近の著書を挙げる．R.M.Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I* : *The inverse problem of Newtonian mechanics,* Springer (1978).

（c）　2,000,000項部分和に対するGibbs現象は付録B.3で計算される（図B.7）.

問題 1．9．6(3)

（a）　$\partial f(x, y)/\partial y$ が与えられた区間内の殆んど到る所で存在して有界であるとすると，差分商の収束性

$$U_n(x,y) \equiv \frac{f(x,y+\Delta_n y)-f(x,y)}{\Delta_n y} \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

から，積分が収束し，すなわち

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\int_a^b U_n(x,y)dx \to \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

よって，節1.6.3のLeibnitzの公式がわかる.

問題 1．9．7(1)

（a），（b）　部分積分法，また必ずしもその様な術語はないけれども，線形汎関数に対するRieszの表現定理.

問題 1．9．7(2)

（b）　$0=\int_\Omega u\Delta\varphi=\int_\Omega \varphi\Delta u$，およびtest関数 $\{\varphi\}$ の $L^2(\Omega)$ における稠密性.

問題 1．9．7(3)

（c）　以前（節1.1の演習問題2（b）参照）$\sqrt{2t}$ が正規確率分布における標準偏差σの役割を演ずることに注目したけれども，ここでは，x が平均の役割を果していることに注意しなければならない．いいかえると，Green関数は一次モメントと二次モメントのみを説明するやり方で，初期熱源データを拡散させる.

問題 1．9．8

（b）　$u(t)=a\sin(t+b)$ を$\lambda\neq 0$ の方程式に代入すると，

$$(a^2\sin^2(t+b)-1)a\cos(t+b)=0.$$

これは $a=0$ でない限り，不可能.

問題 1．9．9

2．（a）　<u>ヒント</u>：データ $f_n(x)=n^{-1}\sin nx$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）を用いよ.
（b）　<u>ヒント</u>：データ $f_n(x)=e^{-\sqrt{n}}\sin(4n+1)x$（$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$），変数分離による解，および最大値ノルムの意味での安定性を用いよ.

3．（a）　$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}e^{-3n^2t}\sin nx.$

（b）　$u(r,\theta)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}r^{2n-1}\sin(2n-1)\theta.$

（c）　$u(x,t)=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x\cos(2n-1)t.$

7．（c）　（i）　成立，（ii）　成立，（iii）　成立，（iv）　負でない解に対して成立．(iii)を含む証明を以下述べる．Ω内で$\Delta u_i-u_i^3=F$，$\partial\Omega$上で$u_i=f\,(i=1,\ 2)$とするとき，Ω内で$\Delta(u_1-u_2)=u_1^3-u_2^3$ かつ $\partial\Omega$上で $u_1-u_2=0$．Greenの等式によって，

$$0\geqq-\int_\Omega(\mathrm{grad}(u_1-u_2))^2=\int_\Omega(u_1-u_2)\Delta(u_1-u_2)$$
$$=\int_\Omega(u_1-u_2)^2(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)\geqq 0.$$

よって，$u_1=u_2$．ここで，算術平均と幾何平均間の不等式が用いられた．
(ii)に対しても同様，Ωで$\Delta u_i=u_i\int u_i^2dy=F$，$\partial\Omega$上で$u_i=f$とすると，$\Omega$で$\Delta(u_1-u_2)=u_1\int_\Omega u_1^2-u_2\int_\Omega u_2^2$，$\partial\Omega$上 $u_1-u_2=0$，Greenの等式によって

$$\begin{aligned}0\leqq\int_\Omega(\mathrm{grad}(u_1-u_2))^2&=\int_\Omega u_1u_2\left[\int_\Omega u_1^2+\int_\Omega u_2^2\right]\\&\quad-\left[\left(\int_\Omega u_1^2\right)^2+\left(\int_\Omega u_2^2\right)^2\right]\\&=[\|u_1\|^2+\|u_2\|^2](u_1,u_2)-[\|u_1\|^4+\|u_2\|^4]\\&\leqq\frac{1}{2}[\|u_1\|^2+\|u_2\|^2]^2-[\|u_1\|^4+\|u_2\|^4]\\&=\|u_1\|^2\|u_2\|^2-\frac{1}{2}[\|u_2\|^4+\|u_2\|^4]\\&=-\frac{1}{2}(\|u_1\|^2-\|u_2\|^2)^2\leqq 0.\end{aligned}$$

よって，$u_1=u_2$．ここでも，先の不等式が用いられた．

8．これは，Bratu，Frank-Kamenetskii，Poisson-Boltzman，Chandrasekhar，Liouvilleの名が冠せられた興味のある方程式である．これは化学反応のArrhenius模型，等温気体の恒星，電気分解などの理論に現われる*)．

問題 1.9.9(9)

1．(a)楕円型．　(b)放物型．　(c)楕円型．　(d)双曲型．　(e)楕円型．　(f)放物型．　(g)$t>0$ で楕円型，$t=0$ で放物型，$t<0$ で双曲型．　(h)　$u_t>0$ のとき楕円型，$u_t=0$ のとき放物型，$u_t<0$ のとき双曲型．

2．（e）　$C=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$．($f$)$C=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$．

*)詳しい情報については次を見よ．K.Gustafson,"Combustion and Explosion Equations and their Calculation," *Computational Techniques in Heat Transfer* (Pineridge, Swansea.1985).

3．(*a*) $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$

(*b*)　$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$

(*c*)　$-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2(-1)^n)}{n^3}\sin nx.$

(*d*)　$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$

4．(*a*)　$N=3.$　　(*b*)　$N=7.$

5．(*a*)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\sin(2n-1)x.$　　(*b*)　$L^2(-\pi,\ \pi)$ で，また点 $x_0=-\pi,\ 0,\ \pi$ を除いて f に点別収束する．それらの点では級数は $(f(x_0^-)+f(x_0^+))/2$ に収束する．(*c*) 表現から直接　(*d*) $-\pi\leqq x<0$ で $-x(\pi+x)$，$0<x\leqq\pi$ で $x(\pi-x)$ に等しい関数の Fourier 級数は $\pi^2/6-\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2nx)/n^2$ である．$x=0$ とおけ．

6．(i) が与えられたとき，任意の二つの解の差 $u=u_1-u_2$ に対して，$L(u_1-u_2)=f-f=0\Rightarrow u_1=u_2.$ (ii) が与えられたとき，$u\equiv 0$ が解であるから，それは唯一つの解である．

7．(*a*)　0 データ（上の演習問題 6 参照）に対して，Greenの等式と境界条件によって

$$D(u)\equiv\int_{x^2+y^2<1}|\mathrm{grad}\ u|^2=\oint_{x^2+y^2=1}u\frac{\partial u}{\partial n}=-7\oint_{x^2+y^2=1}u^2.$$

よって，u は定数で，$x^2+y^2=1$ 上で 0．よって $x^2+y^2\leqq 1$ の各点で 0．よって解は一意．

(*b*)　0 データに対して，$\mathrm{D}(u)=\oint_{\partial\Omega}u\partial u/\partial n=0.$ よって u は定数．一意性は混合境界条件のDirichlet部分が少なくとも微小区間で成り立つことを仮定すればわかる．

(*c*)　すべての束縛条件は線形である．このとき，$D(u)=0$ から u は一定．どちらかの同次境界条件から $u=0.$

(*d*)　L で左辺にある一様な楕円型作用素を表すとき，発散定理によって，Green の第一等式を次の様に修正することができる．

$$\int_{\Omega}uLu-\oint_{\partial\Omega}(ue^x u_x n_x+ue^y u_y n_y)=\int_{\Omega}e^x(u_x)^2+e^y(u_y)^2.$$

このとき，0 データから右辺が 0．よって u は一定で 0．

8．(*a*)　$u(0,\ 0)=(2\pi)^{-1}\int_0^{\pi}1\,d\phi=1/2.$ 平均値定理による．

(*b*)　$u(0,\ 0)=(4\pi)^{-1}\oint_{x^2+y^2+z^2=1}1\,ds=1.$ 平均値定理による．

(*c*)　$u(0,\ 0)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\phi\,d\phi=(4\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos2\phi)\,d\phi=1/2.$

(*d*)　対称性から $u(0,\ 0)=1/4.$ $u=u_1+u_2+u_3+u_4$ とおき，$u\equiv 1$ に注意．

ここで，$\Delta u_i=0$，第 i 辺で $u_i=1$，他の辺で$u_i=0$.

9．まず，適合条件 $\int_\Omega \Delta u=\oint_{\partial\Omega}\partial u/\partial n$ を確かめなければならない．

$$\int_0^2\int_0^4 x^2y\,dxdy=128/3,\ \int_0^4\frac{x}{2}dx+\int_0^2 ydy=6.$$

よって，定数 $k=9/64$ は適合性に対して正しいものである．$\partial\Omega$が区分的に滑らかで，データが解析的であるから，解は存在し，任意定数を除いて一意であるだろう．

解 u を変数分離で構成するには，それを 3 つの部分にわける：$u=u_1+u_2+u_3$. ここで，

$$\begin{cases}\Omega\text{内で} & \Delta u_1=kx^2y\\ \partial\Omega\text{上で} & \dfrac{\partial u_1}{\partial n}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\Omega\text{内で} & \Delta u_2=0\\ \text{上辺上で} & \partial u_2/\partial y=x/2\\ \text{他辺上で} & \partial u_2/\partial n=0\end{cases}\quad\begin{cases}\Omega\text{内で} & \Delta u_3=0\\ \text{右辺上で} & \partial u_3/\partial x=y\\ \text{他辺上で} & \partial u_3/\partial n=0\end{cases}$$

u_1：$kx^2y=\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty}D_{NM}\cos\frac{N\pi}{4}x\cos\frac{M\pi}{2}y$ と展開し，係数を等置して，

$$u_1(x,\ y)=\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty}\left(\frac{-D_{NM}}{N^2+4M^2}\right)\cos\frac{N\pi}{4}x\cos\frac{M\pi}{2}y+\text{任意定数}.$$

ここで，$D_{MN}=\frac{k}{2}\int_0^2\int_0^4 x^2y\cos\frac{N\pi}{4}x\cos\frac{M\pi}{2}ydxdy$.

u_2：変数を分離して，すなわち，$u(x,\ y)=X(x)Y(y)$，$x=0$ で $u_x=0$，$y=0$ で $u_y=0$ を用いると，$u(x,\ y)=C\cos\lambda x\cosh\lambda y$. $x=4$ で $u_x=0$ から，$\sin 4\lambda=0$. よって$\lambda=N\pi/4\ (N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$. すなわち

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_N\cos\frac{N\pi}{4}x\cosh\frac{N\pi}{4}y.$$

$y=2$ での境界条件 $u_y=x/2$ から，

$$C_N=\frac{2}{N\pi\sinh\left(\frac{N\pi}{2}\right)}\int_0^4\frac{x}{2}\cos\frac{N\pi}{4}xdx=\frac{-16((-1)^N-1)}{N^3\pi^3\sinh\left(\frac{N\pi}{2}\right)}.$$

u_3：ふたたび，変数を分離して，$x=0$ で $u_x=0$，$y=0$ で $u_y=0$ なる解は u_2 と同様に考えて今度は，$u(x,\ y)=C\cosh\lambda x\cos\lambda y$ とおく．$y=2$ で $u_y=0$ から，$\sin 2\lambda=0$. よって，$\lambda=N\pi/2\ (N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$. よって

$$u_3(x,y)=\sum_{N=1}^{\infty}C_N'\cos\frac{N\pi}{2}y\cosh\frac{N\pi}{2}x.$$

ここで，$x=4$ で最後の境界条件 $u_x=y$ により，

$$C_N{}'=\frac{2}{N\pi\sinh(2N\pi)}\int_0^2 y\cos\frac{N\pi}{2}ydy=\frac{-8((-1)^N-1)}{N^3\pi^3\sinh(2N\pi)}.$$

節 2.1

1．$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx\sin nt,\quad c_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}g(s)\sin ns ds.$

2．(a)　$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx\sinh n(\pi-y)+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin ny\sinh n(\pi-x).$

$$c_n=\begin{cases}0(\text{偶数})\\ \dfrac{8}{n^3\pi\sinh n\pi}(\text{奇数})\end{cases}\quad d_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\sinh n\pi}.$$

3．(a)　$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-n^2t}\sin nx,$　$c_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}\ (\text{奇数})\\ \dfrac{4}{n\pi}(n=2,6,10,\cdots)\\ 0(n=4,8,12\cdots).\end{cases}$

(b)　$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\qquad u(\pi/2,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2t}(-1)^{n+1}}{2n-1},$

特に $u(\pi/2,\ 0)=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.$

(c)　ヒント：一般に（大きな t に対して可成り良い）評価

$$|u(x,t)|<\frac{2}{\pi}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

がある．これから，$t\to\infty$のとき，一様に $u(x,\ t)\to 0$ が示される．小さな t に対して期待されるものは，区間〔0, π〕内の幾つかの x_i に対する解を見ればよい．例えば，$x=0.6\pi$で次のデータから解を描写することができる．

$u(0.6\pi,t)\cong$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)\sin(0.6\pi)e^{-t}$ +	$\left(\frac{2}{\pi}\right)\sin(1.2\pi)e^{-4t}$ +	$\left(\frac{2}{3\pi}\right)\sin(1.8\pi)e^{-9t}$	
0.8549	0.6055	0.3742	−0.1247	$t=0$
0.7480	0.5478	0.2508	−0.0527	0.1
0.6432	0.4957	0.1681	−0.0206	0.2
0.5529	0.4485	0.1127	−0.0084	0.3
0.4165	0.3672	0.0506	−0.0014	0.5
0.2296	0.2227	0.0069	−0.0000	1.0

節 2.2

1．（a）　始めに，解 $u=\sum u_n$ に対して，Weierstrass$M$ 判定法を適用するために，次の不等式に注意する．

$$|u_n(x,t)| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(s)|ds \cdot e^{-n^2t},\quad \left|\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(s)|ds \cdot n^2 e^{-n^2t},$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(s)|ds \cdot n e^{-n^2t},\quad \left|\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(s)|ds \cdot n^2 e^{-n^2t}.$$

比判定法とl'Hospital規則によって，$\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n^2t_0}$ は任意整数 $k>0$ と任意の $t_0>0$ に対して収束級数であり，よって，Weierstrass M判定法により導関数のすべての級数は一様に収束する．

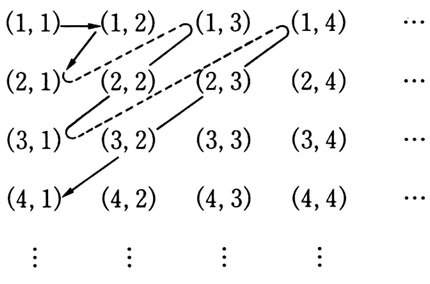
2．（a）　次の２つの事柄がそれにとって良くない．（ i ）M判定法が適用できないこと．（ii）対称性の破れ．（c）成立．

3．例えば，$\|u(x,\ t)\|_{L^2}<\frac{\pi}{2}(E(0))^{1/2}$．すなわち，任意の x に等しいsに対して

$$\int_0^\pi u^2(s,t)ds \leqq \frac{\pi^2}{8}\int_0^\pi [(u_s(s,t))^2+(u_t(s,t))^2]ds.$$

節 2.3

2．重複要素を除去して，$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$が可算的であることを示すことで十分である．ここで，$\mathbb{Z}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$．それを示す通常の方法は次のダイヤグラムを介して，$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$を数え上げることである．



3．（b）（ i ）　$C[0,\ 1]$ に対する次の基底は1927年J.P.Schauderによって与えられた．$\chi_{(a,b)}$ で区間 $(a,\ b)$ の特徴関数 χ を示す．すなわち，$x\in(a,\ b)$ のとき $\chi(x)=1$，$x\notin(a,\ b)$ なら $\chi(x)=0$．このとき，$\varphi_0(x)=\chi_{[0,1]}(x)$，$\varphi_1(x)=x\varphi_0(x)$，$\varphi_2(x)=\varphi_1(2x)+\chi_{(0,1]}(2x-1)-\varphi_1(2x-1)$，……，$\varphi_{2^n+k}(x)=\varphi_2(2^nx-k+1)$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k=1,\ \cdots\cdots$）はC[0,　1] に対するSchauder基底である．

節 2.4

1．（a）　ヒント：$u'=y'du(y)/dy=(r(x)p^{-1}(x))^{-1/2}du(y)/dy$に注意して計算せよ.*）形式的に進めて，これから，結局次に到達する.

$$c=\frac{q}{r}+\frac{p''}{4r}-\frac{(p')^2}{16pr}+\frac{p'r'}{8r^2}+\frac{pr''}{4r^2}-\frac{5p(r')^2}{16r^3}.$$

これを次式の代入により $c(y)$ にする.

$$x(y)=\int_{y_0}^{y}(p(x)r^{-1}(x))^{1/2}dx+x(y_0).$$

3．固有値は単純（すなわち重複度１）である.

節 2.5

1．（a）　$v(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)$

とおこう．よって波動方程式は

$$v_{\xi\eta}=-F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

となる．図2.5 e に示した如く，(x_0,　y_0) を固定して，同図に示した様に，ξに関して$\xi=\eta$ から$\xi=x_0+t_0$ まで積分せよ．次にηに関して x_0-t_0 から x_0+t_0 まで積分すると，特性三角形上の積分演算が完結する．結果は，x と t の変数に戻して，データを代入すれば得られる．（b）$F\in C^2$，$f\in C^2$，$g\in C^2$ を仮定し，積分記号のもとで微分せよ．（c）　d'Alembert公式から.

2．（c）　積分記号のもとで微分して，$Lu=LL^{-1}F=F$ を示せ．Green関数はこの様に，0境界条件をもつラプラシァン L を反転させる積分作用素の核である．実際，L^{-1} は〝コンパクト〟作用素で，有界であることより強い条件である．節2.7.2の議論を参照せよ.

3．（a）　今１に正規化せずに c の伝播速度をもつとき，d'Alembert解は

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$$
$$+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}F(y,s)dyds.$$

である．よって，$u(x,\ t)=x^2+c^2t^2$，$u(100,\ 100)=10^4(1+c^2)$.

*）（訳者注）節 2．4 中，式(1)′（p. 177問題 1（a））を除き，すべてのプライム（′）は$\frac{d}{dx}$を示し，式(1)′においては$\frac{d}{dy}$を与えることに注意

(*b*)　$$u\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}(2+2)+\frac{1}{4}\int_{-5/2}^{7/2}ds+\frac{1}{4}\int_0^{3/2}\int_{2s-5/2}^{7/2-2s}e^z dzds$$
$$=\frac{7}{2}-\frac{1}{8}[2e^{1/2}-e^{7/2}-e^{-5/2}].$$

(*c*)　自由端境界条件のため，必要な限り初期データまでも展開する．すると

$$u(1/2,2)=\frac{1}{2}[1+1]+\frac{1}{2}\int_{-3/2}^{5/2}|\sin_e\pi s|ds$$
$$=1+\frac{4}{2}\int_0^1\sin\pi x dx=1+4/\pi.$$

ここで，$\sin_e\pi s$ は $\sin\pi s$ の他区間への延長を示す．

休止　第三回

1．$$\int_\Omega(u-u_N)^2 r dx=\int_\Omega u^2 r ds+\sum_{n=1}^N\left(\frac{\int_\Omega u\phi_n r dx}{\int_\Omega\phi_n^2 r dx}-c_n\right)^2-\sum_{n=1}^N\left(\frac{\int_\Omega u\phi_n r dx}{\int_\Omega\phi_n^2 r dx}\right)^2.$$
よって，$c_n=\int_\Omega u\phi_n r dx/\int_\Omega\phi_n^2 r dx=(u,\ \phi_n)/(\phi_n,\ \phi_n)$.

2．$\phi_n=(2/\pi)^{1/2}\cos nx$ は，問題 $(0,\ \pi)$ 上 $-u''=\lambda u$，$u'(0)=u'(\pi)=0$ に適用されたSturm-Liouville定理によって，$L^2(0,\ \pi)$ における極大正規直交集合である．よって，$\ln x$ が 2 乗可積分であれば，$\int_0^\pi \ln x\cos nx dx=(\pi/2)^{1/2}(\ln x,\ \phi_n)=(\pi/2)^{1/2}c_n\to 0$. この$\ln x$ の性質は微積分学とl'Hospital規則から次の様にしてわかる．

$$\int_0^1(\ln x)^2dx=\lim_{\varepsilon\to 0}[x(\ln x)^2-2x(\ln x-1)]_\varepsilon^1$$
$$=2-\lim_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon(\ln\varepsilon)^2-2\varepsilon\ln\varepsilon+2\varepsilon]$$
$$=2-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2(\ln\varepsilon)(\varepsilon^{-1})}{(-\varepsilon^{-2})}-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}}\right)$$
$$=2$$

3．$u(x)=|x|^{-1/2}$ は 2 乗可積分でない．よってParsevalの等式が利用できない．しかるに，$u(x)$ が可積分であることを仮定すれば，ϕ_nが一様に有界であることに注意すると，Riemann-Lebesgue補助定理（休止第二回を見よ）が使える．よって，結果は次の積分からわかる．

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{-1/2}dx=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\pi x^{-1/2}dx=4\lim_{\varepsilon\to 0}[x^{1/2}]|_\varepsilon^\pi=4\pi^{1/2},$$

4．これは定理HのFourier表現では陰的である内積の連続性からわかる．

$$u=\lim_{N\to\infty}\Sigma^N\frac{(F,\phi_{nm})}{n^2+m^2}\phi_{nm}=\lim_{N\to\infty}\left(\Sigma^N\frac{\phi_{nm}\phi_{nm}}{n^2+m^2},F\right).$$

が成り立つ．ほかに，演習問題 5 におけるParseval等式の内積形式を用いること

ができる．

5．$\|u-v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2-2(u,\ v)$ から，Parseval等式のノルム2乗表現で，

$$\sum(c_n-d_n)^2=\sum c_n^2+\sum d_n^2-2(u,v).$$

これから，内積表現の等式がわかる．

6．節2.4問題1の正規形式を思い出せ．そこで与えた一般的な処方でなく，直接実行した方が早い．$\hat{x}=(\sqrt{m\omega/\hbar})x$ とおくと，$\hat{x}$ は無次元の新しい独立変数である．なぜなら，m が質量，ω が角振動数，$\hbar$ がエネルギ・秒の単位をもつ量であるから $\sqrt{m\omega/\hbar}$ は（長さ）$^{-1}$の単位をもつ．連鎖規則と代入によって

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{d\hat{x}^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{m\omega}(\hat{x})^2u\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{x}\right)=Eu\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{x}\right)$$

$(\hbar\,\omega/2)$ で割ると，これは

$$\left(-\frac{d^2}{d\hat{x}^2}+\hat{x}^2\right)u\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{x}\right)=Eu\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{x}\right)$$

となる．ここで，$\varepsilon=E/\hbar\,\omega$．$\hat{u}(\hat{x})=u(\sqrt{\hbar}\,x)$ とおくと，正規形式

$$-\hat{u}''(\hat{x})+c(\hat{x})\hat{u}(\hat{x})=\lambda\hat{u}(\hat{x})$$

を得る．ただし，$c(\hat{x})=\hat{x}^2$．$\lambda=2\varepsilon=2E/\hbar\,\omega$．

7．上で得た方程式を自己共役形式に変形せよ．記法の簡便さのため，$\hat{u}$ と $\hat{x}$ をそれぞれ u と x と書こう．$u=e^{-x^2/2}h(x)$ を正規形式

$$-u''+x^2u=\lambda u$$

に代入して，

$$(1-x^2)e^{-x^2/2}h+2xe^{-x^2/2}h'-e^{-x^2/2}h''+x^2e^{-x^2/2}h-\lambda e^{-x^2/2}h=0.$$

これは

$$-h''+2xh'+(1-\lambda)h=0$$

となり，節2.1の別表現の形式になる．

$$-(e^{-x^2}h')'+\mu e^{-x^2}h=0.$$

ここで，$\mu=\lambda-1=2(\varepsilon-1/2)$．これをODE形式：$a_0y''+a_1y'+a_2y=0$（ただし $a_0=1$）と呼ぼう．これは明らかに自己共役形式と同値である．方程式のこの対称な形式のほかに，自己共役性よって固有関数の完備性に対して，正しい境界条件がまた必要である（例えば，節2.4，節1.9.7(1)の始めの議論そして節2.9.4のあとの議論を見よ）．上のHermite方程式に対しては，$p=r=e^{-x^2}$ で，Hilbert空間は

$L^2(-\pi,\ \pi,\ e^{-x^2})$. よって重み e^{-x^2} に関して適当に無限遠点で消える様な固有関数 h を指定する必要がある．

この様に重要な方程式でも，内容に応じて異なる様式に書かれたことは注目に値しよう．例えば，Hemite方程式は調和振動子の問題にしばしば見出されるが，その正規形式は 2 つあって，

$$-u''+x^2u=\lambda u, \qquad u''-\frac{x^2}{4}u+\lambda u=0.$$

これらは $\bar{x}=\alpha x$ とおいて関係づけられる．$\alpha=\sqrt{2}$.

8．$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を一般解とする．方程式の係数が解析的であるから，解も解析的である．ODE形式に代入すると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\mu\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

添字を移動させて，$n\geqq 2$ の係数に対して

$$n(n-1)a_n-2(n-2)a_{n-2}+\mu a_{n-2}=0$$

が要請される．よって，漸化式

$$a_{n+2}=2a_n\frac{[n-(\varepsilon-1/2)]}{(n+1)(n+2)}$$

によって，すべての偶数と奇数番目の係数はそれぞれ a_0 と a_1 の値によって与えられる．更に，$\varepsilon-1/2=n$ が整数の場合，級数は有限項で打切られる．

$a_0=1$，$a_1=0$，$\varepsilon-1/2=0$ のとき，第 1 固有関数 $H_0(x)=1$ となる．$\varepsilon-1/2=2$ から，$H_2(x)=1-2x$．n が偶数の場合にこれを続けて，偶数次のHermite多項式のすべてが得られる．

$a_0=0$，$a_1=1$，$\varepsilon-1/2=1$ に対して，$H_1(x)=x$．同じ様にして，奇数の n に対して奇数次のHermite多項式 $H_3(x)=x-(2/3)x^3$，……が得られる．

他には何も存在できない．なぜなら，$n-(\varepsilon-1/2)$ が消えないならば，すべての項がべき級数に残って，それらの減衰因子 e^{-x^2} を埋没させて，Hilbert空間から解をはみ出させてしまうだろう．

9．(*a*)　Haar関数の詳細に踏み込むことは，余りにも遠くへ行ってしまうことになる．それらの直交性は保証された台集合から明らかで，その正規直交性はそれらの重み関数で与えられる．それが極大であることはそれ程直接的でないけれども，示され得る（例えば，C_0級関数の稠密性を用いて節2.4と同様にして）．(*b*) Haarの要点は正則なSturm-Liouville方程式から導かれたことであった．(*c*) Haar系は関数解析やエルゴード理論で非常に有用である．はるかによく知られているHaarの第二とそれ以後の寄与は，Lebesgue測度を一般化して，任意の局所コンパクト位相群上で不変測度を構築することであった．第三の寄与は，衆知とは言い難いが，微分方程式にとって最も重要であり，Sturm-Liouville級数展開の大

きなクラスがそのFourier三角級数展開と共に，点別に収束するか発散するという可成り注目すべき事実である．すなわち，Dini判定とその結論が他の固有関数展開にも同様に適用される*)．

*) A.Haar,"Zür Theorier der orthogonalen Funktionensysteme," *Math. Annalen* **69** (1910), 331-371, **71** (1911), 38-53. Haar系およびDini判定からのもっと一般的な結論がHaarの学位論文の主要部分を構成した．

訳者略歴

阿部(あべ) 剛久(たけひさ)

1961年　早稲田大学第一理工学部応用物理学科卒業

1964年　同大学大学院理工学研究科数学専攻修士課程修了

現在　芝浦工業大学システム工学部教授

専攻　代数解析学，応用数学

著書　「微分方程式入門」森北出版.「統計学要論」(共著)共立出版　ほか多数

音田(おんだ) 功(いさお)

1957年　北海道大学理学部地球物理学科卒業

1961年　同大学大学院理学研究科博士課程中退

現在　群馬大学工学部教授　理学博士

専攻　応用数学，地震学

著書　「複素解析学入門」(共訳) 東京図書.「土木耐震工学」(共著) コロナ社　ほか多数

古城(こじょう) 朝美(ともみ)

1973年　早稲田大学第一理工学部応用物理学科卒業

1975年　同大学大学院理工学研究科物理学専攻修士課程修了

現在　芝浦工業大学システム工学部講師

専攻　関数方程式論

著書　「数学概論」(共著)大竹出版.「微分積分」(共著) 学術図書出版

応用偏微分方程式(上)
—近代的方法への入門—

1991年 9 月 1 日発行

著　者　K.E.グスタフソン

訳　者　阿部剛久
　　　　音田　功
　　　　古城朝美

発行者　黒田　肇

発行所　海外出版貿易株式会社
　　　　東京都千代田区神田司町 2 丁目21〒101
　　　　電話(03)3292-4271振替東京52453

Printed in Japan